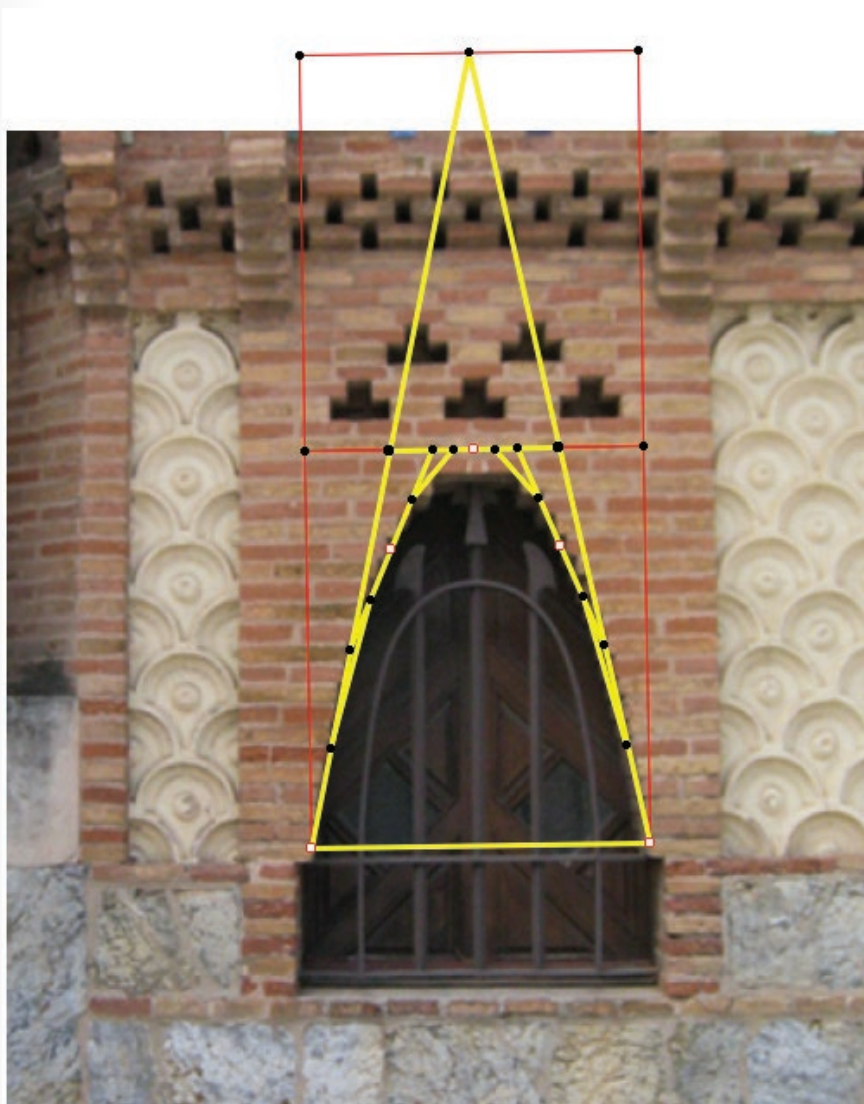


Gaudis arkitektur med TI-Nspire CAS



Bjørn Felsager, september 2013



Gaudis arkitektur med TI-Nspire™ CAS



Bjørn Felsager, september 2013

Forord

I en længere årrække holdt matematiklærerforeningen en række velbesøgte kurser i Barcelona med fokus på arkitekturen i Barcelona, og ikke mindst Gaudis banebrydende og spektakulære arkitektur fra Barcelona og omegn. Kurserne blev afholdt under særdeles kyndig ledelse af Ivan Taftebjerg Jakobsen og Jesper Matthiasen. Min kone Mette og jeg var selv så heldige at få lov til at være med på et af kurserne, dog ikke uden en vis dramatik: En islandsk vulkan Eyjafjallajökuld forpurrede luftrummet over Europa i 2010 og umuliggjorde afholdelsen af det første kursus, vi skulle have deltaget i. Ved den næste gentagelse af kurset faldt datoerne så uheldigt at vi lige netop ikke kunne nå at komme med på grund af en anden rejse. Men tredje gang var lykkens gang!

Ud over matematiklærerforeningens kursus har jeg selv afholdt blandt andet studierejser til Barcelona. Så Gaudis arkitektur var et kærmoment og yndet tema i matematikundervisningen, ikke mindst når det kom til at belyse parablens rolle i arkitekturhistorien. I dette hæfte udfoldes dette tema med støtte fra TI-Nspire CAS. Det muliggør en geometrisk tilgang kombineret med en symbolsk håndtering af ligninger og parameterfremstillinger, noget der klæder Gaudis arkitektur.

Hvis man ønsker at supplere denne fremstilling med andre fremstillinger er der især to bøger jeg vil fremhæve:

I forlængelse af matematiklærerforeningens kursus udgav Ivan Taftebjerg Jakobsen på matematiklærerforeningens forlag den flot illustrerede og meget velskrevne bog

Antoni Gaudí: Geometrien bag arkitekturen

med en omfattende gennemgang af teorien bag Gaudis arkitektur, samt et væld af interessante observationer og øvelser.

Ønsker man at arbejde med en mere generel tekst om matematikkens rolle i arkitekturen vil jeg ligeledes kraftigt anbefale

Helmut Pottmann, Andreas Asperl, Michael Hofer og Axel Kilian: Architectural Geometry, Bentley Institute Press, 2007

Den ligger umiddelbart i forlængelse af det gymnasiale niveau og indeholder en glimrende pædagogisk gennemgang af den matematik, der ligger bag moderne arkitektur. Her vil elever med en lille arkitekt i maven kunne se, hvorfor al den matematik de overhovedet kan komme i nærheden af i gymnasiet er yderst relevant for deres fremtidige virke ☺.

Til slut vil jeg gerne takke Texas Instruments for økonomisk støtte til at deltage i matematiklærerforeningens kursus.

Alle fotografier i dette hæfte er private fotos. De kan nemt suppleres med de omfattende fotosamlinger, der findes på nettet og som kan findes ved at google løs ☺

Denne udgave af hæftet er skrevet til TI-Nspire CAS version 3.6.

Bjørn Felsager, september 2013

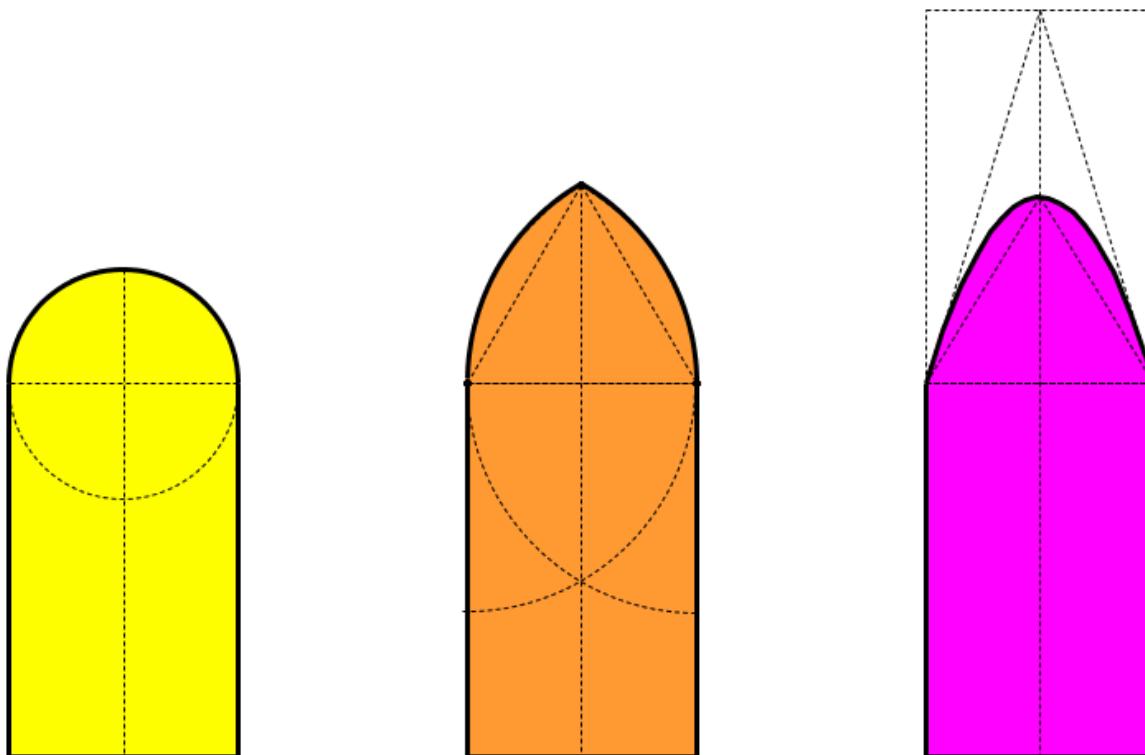
Indholdsfortegnelse

Første del: Kurver med fokus på parabler og kædelinjer	3
1. Parablen kommer på banen	4
1.1 Det nye hvælv	4
1.2 Parablens og kædelinjens egenskaber	17
1.3 Kunsten at sy en parabel	26
1.4 Gaudis buer	36
Anden del: Flader med fokus på keglesnitsflader	52
2. Den guddommelige flade I: Den hyperbolske paraboloid	53
2.1 Konstruktion af den guddommelige flade: Den hyperbolske paraboloid	53
2.2 Den hyperbolske paraboloid som graf for et andegradspolynomium: $z = x \cdot y$, $z = x^2 - y^2$	67
2.3 Strukturen af en paraboloid	71
2.4 Gaudis hvælvinger og kupler	76
3. Den guddommelige flade II: Den elliptiske hyperboloid	86
3.1 Parameterfremstillinger for cirkler og ligesidede hyperbler	86
3.2 Simple omdrejningslegemer	93
3.3 Hyperboloiden med et net	96
3.4 Gaudis lysskakter	112

#

Første del: Kurver med fokus på parabler og kædelinjer

Traditionelle buer til porte og lignende bliver udført med *cirkelbuer*. Der er forskellige muligheder, fx halvcirkelbuer (rundbuer), eller kombinationer af to cirkelbuer, fx spidsbuer udsået af en ligesidet trekant:



Sådanne buer har været benyttet til portåbninger, vinduesrammer osv. i århundreder i bl.a. kirkebyggeri, hvor *rundbuen* er typisk for romansk arkitektur og *spidsbuen* er typisk for gotisk arkitektur.

Gaudi indførte imidlertid allerede fra sine unge dage, en helt ny type buer, der er inspireret af parabelbuer, og derfor under et kaldes parabelformede buer. Til dekorative formål brugte han egentlige parabelbuer, men til strukturelle formål brugte han omvendte kædelinjer, der har en endnu bedre stabilitet. Gaudi var ikke den eneste spanske/catalanske arkitekt, der anvendte de parabelformede buer. Det gjaldt også mange af hans samtidige kolleger, der som Gaudi fulgte modernismens strømninger i arkitekturen. I de følgende afsnit kigger vi derfor både på geometrien bag parabler og kædelinjer og ser typiske eksempler på deres anvendelser i buer og hvælve.

1. Parablen kommer på banen

1.1 Det nye hvælv

Går du tur i Barcelonas gader vil du falde over de karakteristiske hvælvede døre, som den følgende fra Carrer del Concili Egarenc i de nordlige forstæder af Barcelona.



Du kan selv finde døråbningen med Google Earth, da Barcelona selvfølgelig også er blevet gennemfotograferet af Google!



Her ses gadehjørnet fra siden i Google Earths gengivelse: Det er døråbningen lige bag ved damen!

Spørgsmålet er så om du kan genkende kurven? Det er da nærtliggende at forsøge sig med en parabel. Har du ikke prøvet før, så åbner du nu for TI-Nspire CAS og lukker et graf-værksted op. I dette graf værksted indsætter du et billede af døråbningen;

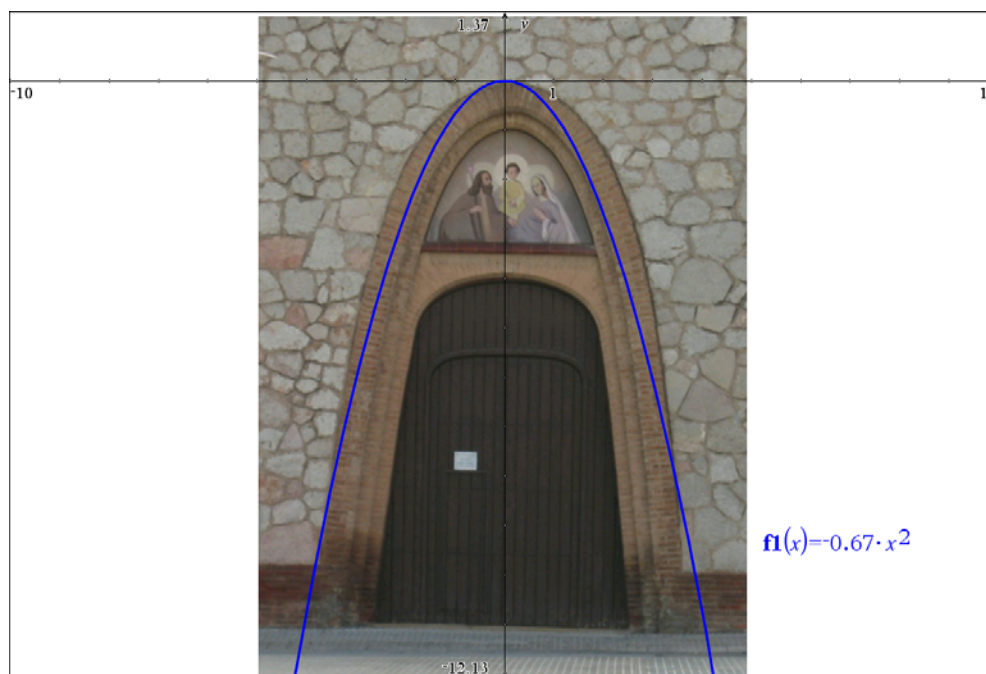


Billedet kan godt se lidt skævt ud, men vi forsøger os med en parabel, idet vi først tillemper koordinatsystemet ved at trække i koordinatplanen, så Origo flyttes op til den øverste kant af hvælvingen:

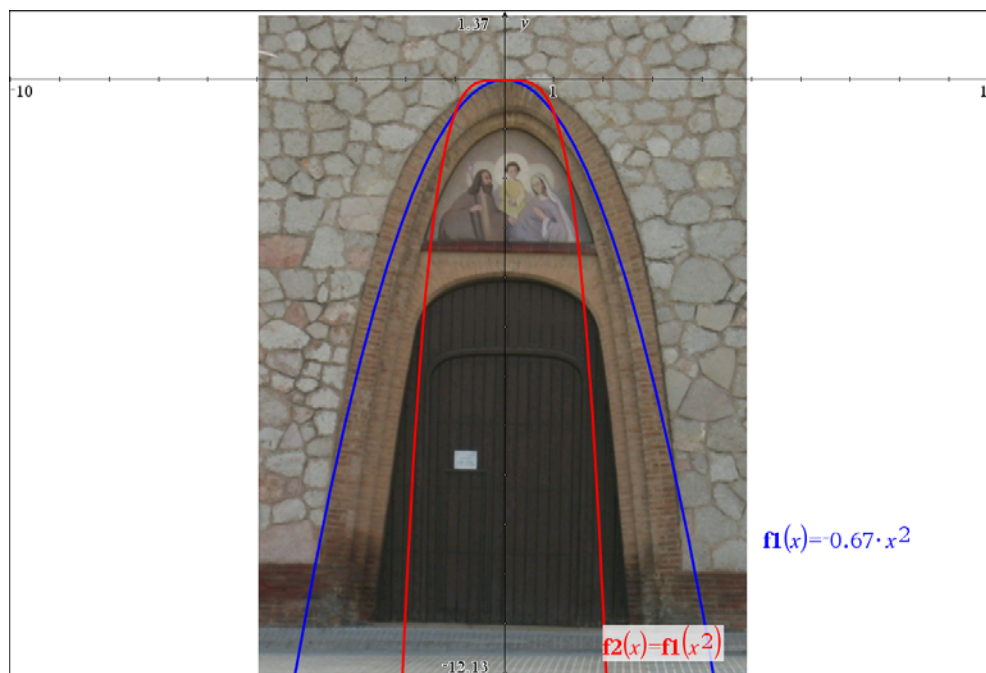


Derefter trækker du forsigtigt i parablens grene og forsøger at tilpasse den til døråbningen. Konklusion? Parablen er en standardgraf, som du kan trække i for at tilpasse den. Du kan enten trække i parablens toppunkt, hvorved du forskyder den, eller du kan trække i grenene, hvorved du spreder eller samler de to grene, inklusive at du vender og ned på parablen.

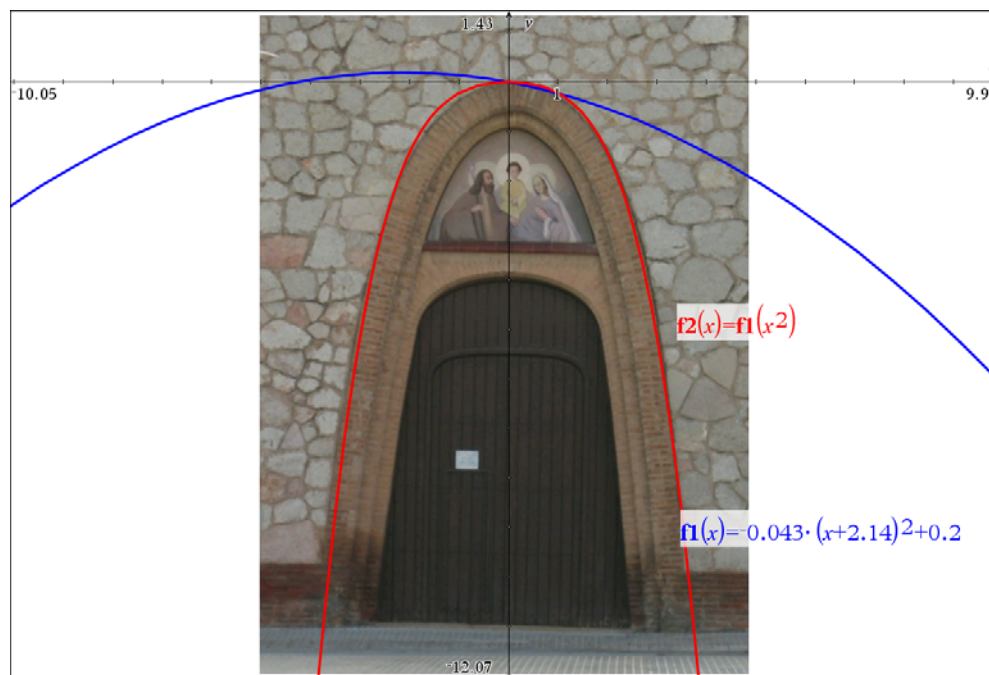
Det er den simpleste måde at afgøre visuelt om du kan modellere med et andengradspolynomium. I dette tilfælde vil du nok være lidt skuffet: Det ligner ikke rigtigt en parabel:



Hvad kan vi så gøre? Vi skal have fat i en kurve, der er langt mere flad i toppen end parablen!



Vi kan da forsøge os med et simpelt fjerdegradspolynomium af formen $y = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$, hvor vi har erstattet x med x^2 i forskriften for andengradspolynomiet. Læg mærke til at det giver et fjerdegradspolynomium med en graf, der er symmetrisk omkring y-aksen. Vi modellerer nu geometrisk ved at indskrive funktionen $f_2(x) = f_1(x^2)$ og så trække i den blå graf, hvorved den røde graf følger med. Konklusion?



Det er straks bedre, men det er til gengæld langt sværere at styre modelleringen, idet vi denne gang også skal forskyde den blå parabel ved at trække i toppunktet i stedet for blot at vippe grenene.

Vi skal tydeligvis have fat i nogle nye ideer til modellering! Vi kan da fx vende os mod regressionsmodeller, hvor vi lader TI-Nspire CAS regne på det bedste polynomium. Vi skal da have foretaget en opmåling af døråbningen. Det kan fx gøres således:

Vi indsætter et punkt og højreklikker på det for at måle dets koordinater:



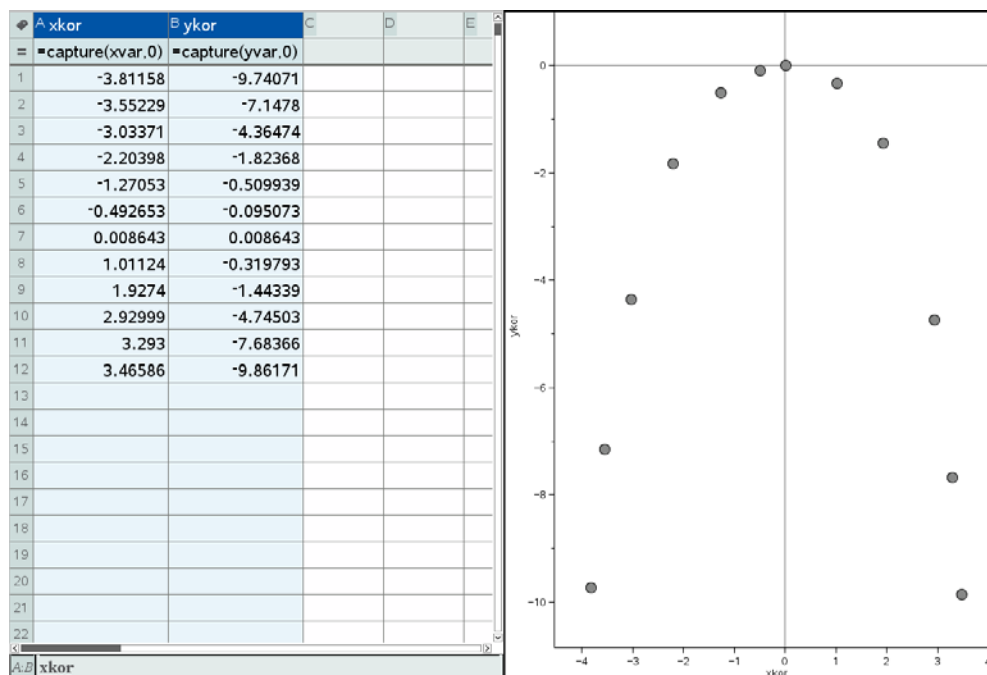
Ved at højreklikke i x-koordinaten kan vi nu vælge at lagre den som variabelen **xvar**. Tilsvarende vælger vi at lagre y-koordinaten som **yvar**. Derefter opretter vi en ny side med et regneark:

A	xkor	B	ykor	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	=capture(xvar,0)		=capture(yvar,0)									
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

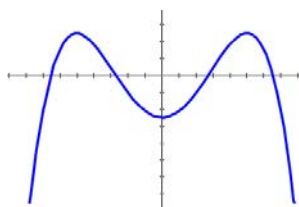
I regnearket opretter vi nu søjler **xkor** og **ykor**, der skal rumme værdierne af koordinaterne. Vi opretter derfor manuelle målinger af **xvar** og **yvar** som vist - du kan fx oprette målingerne ved hjælp af data-menuen eller ved simpelthen at indskrive procedurerne som vist. Men læg mærke til at der *ikke* er tale om matematiske kommandoer, idet de ikke kursiveres! Flyt nu forsigtigt rundt på punktet idet du for hver ny placering taster CTRL . (dvs. Control Punktum), som er den kommando, der udløser målingen!

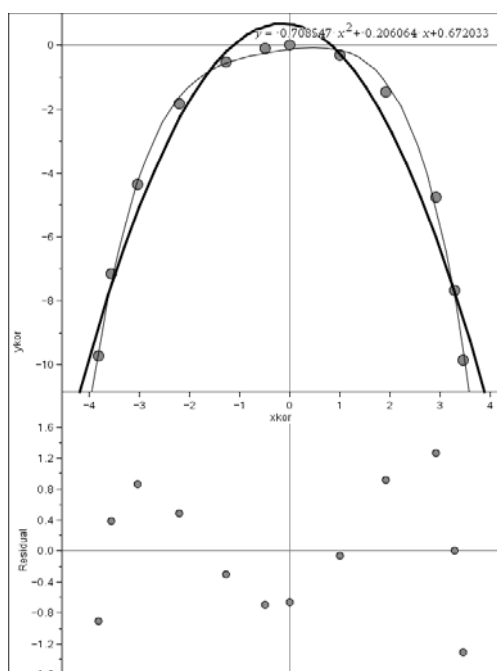
A	xkor	B	ykor	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	=capture(xvar,0)		=capture(yvar,0)									
1	-3.81158		-9.74071									
2	-3.55229		-7.1478									
3	-3.03371		-4.36474									
4	-2.20398		-1.82368									
5	-1.27053		-0.509939									
6	-0.492653		-0.095073									
7	0.008643		0.008643									
8	1.01124		-0.319793									
9	1.9274		-1.44339									
10	2.92999		-4.74503									
11	3.293		-7.68366									
12	3.46586		-9.86171									
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

Du kan få dataserien at se ved at oprette et punktplot, idet du skifter graftype og afsætter **xkor** ud af x-aksen og tilsvarende **ykor** op af y-aksen. Men du kan selvfølgelig også oprette et diagram og statistikværksted, hvor du afbilder **xkor** ud af x-aksen og **ykor** op af y-aksen. Det gøres hurtigt og elegant ved at sværte de to søjler til (klik fx på titelbogstavet for oven i søjlen og derefter på pil op, hvorefter du holder SHIFT ned for at vælge mere, hvilket gøres ved at taste pil til højre: du kan nu vælge højreklikke i de markerede søjler og vælge **hurtiggraf** fra data-menuen).

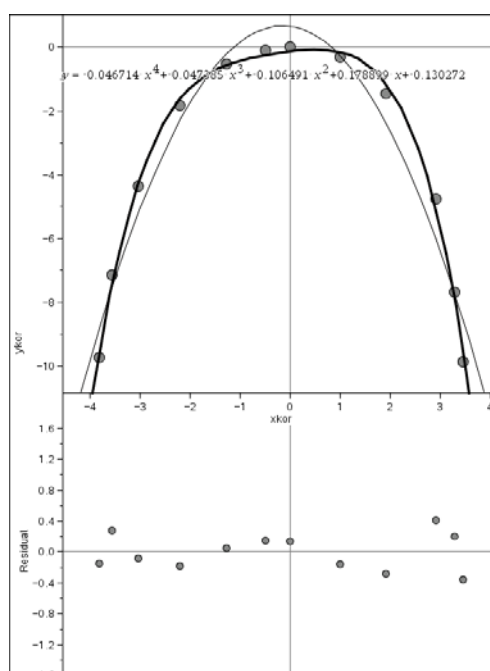


Så er vi klar til modelleringen! Vi prøver da med både et andengradspolynomial og et fjerdegradspolynomial. Tilføjer vi residualplot kan vi bedre vurdere kvaliteten af modellen. Ved andengradspolynomiet seer vi da tydelige afvigelser på op til 1.5 samtidigt med at vi ser en tydelig systematisk variation af residualerne



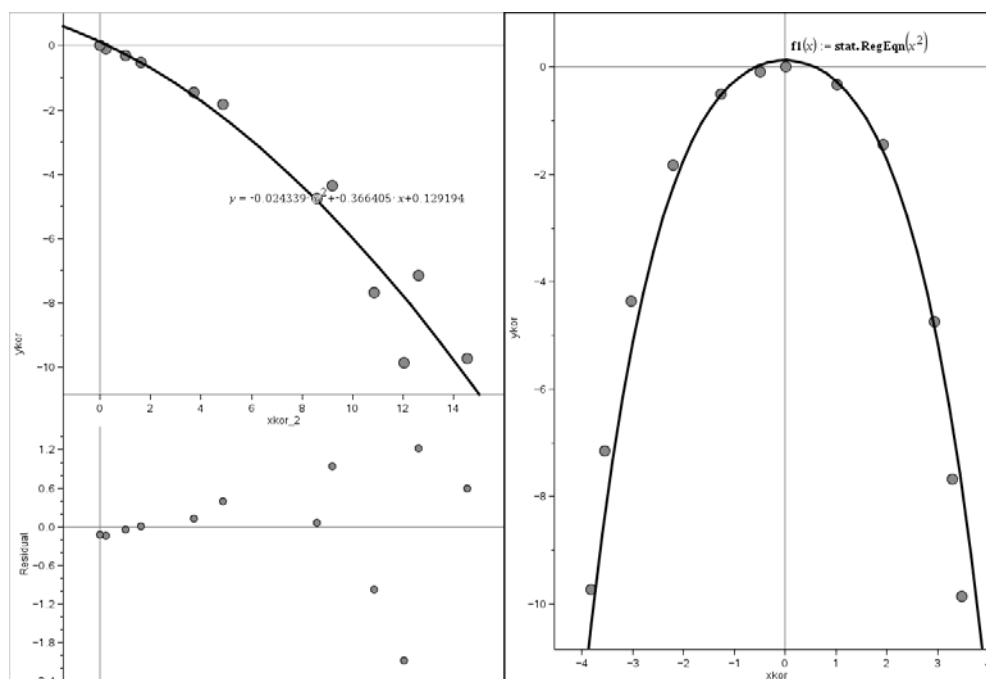


Modellering med andengradspolynomier



Modellering med fjerdegradspolynomier

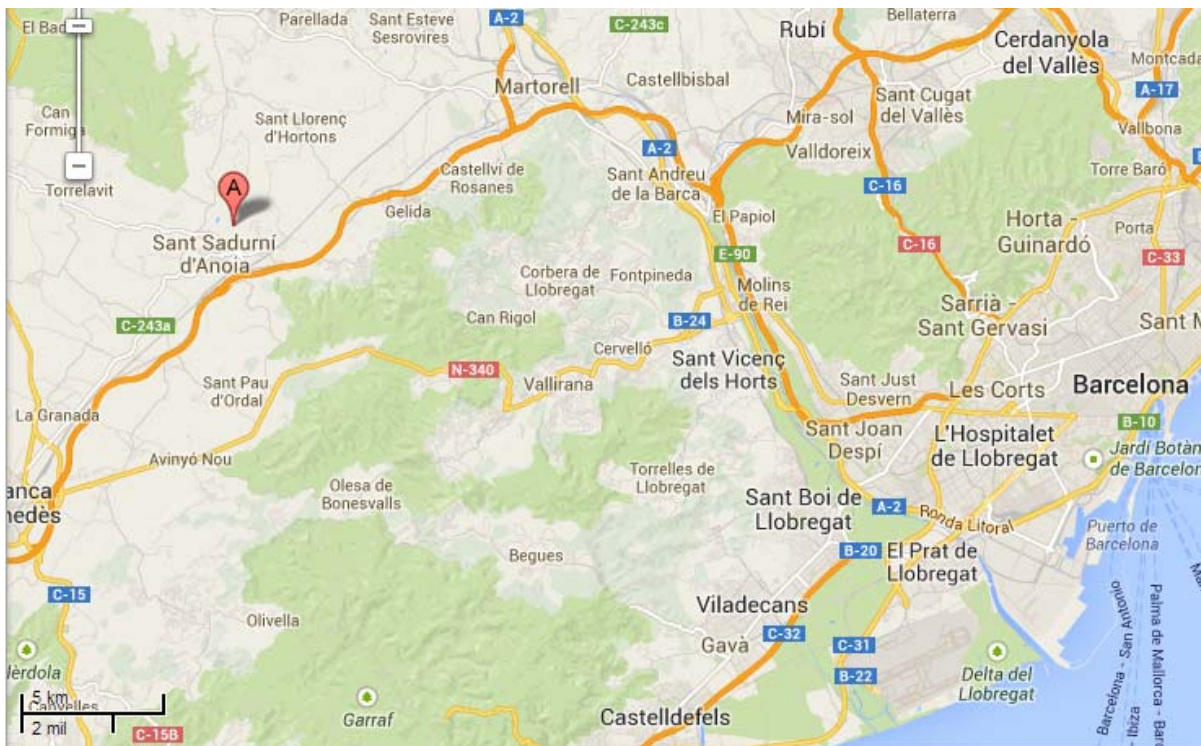
Ved fjerdegradspolynomiet er residualerne fire gang så små. Der er en vis asymmetri, men vi kan fjerne den ved at bruge det samme trick som før, idet vi i stedet kan modellere med et andengradspolynomium som funktion af x_{kor}^2 . Prøv selv, det ser sådan ud:



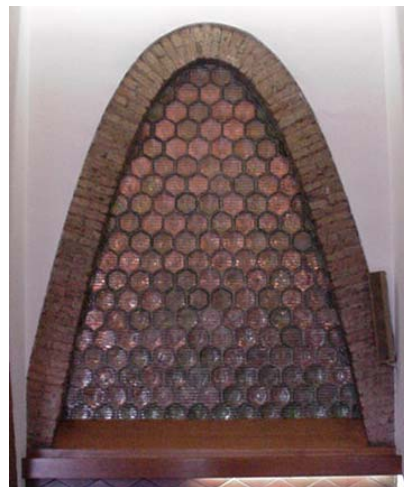
Så vi ser at et andengradspolynomium ikke er den rigtige model for de karakteristiske dørvhælvninger. Det går straks bedre med et fjerdegradspolynomium, men det er svært at forestille sig at arkitekterne virkelig skulle foretrække symmetriske fjerdegradspolynomier, så vi skal nok finde den rigtige model et helt andet sted. Det vender vi tilbage til. Men her spørger vi bare om vi slet ikke kan finde rigtige parabler i Cataloniens arkitektur? Det kan vi selvfølgelig godt, men det er ikke så nemt hos Gaudi om end vi skal se

nogle spektakulære anvendelser senere ☺. I stedet skal vi drage ud i omegnen og se på nogle af hans samtidige arkitekter, der også var optaget af et nyt moderne formsprog.
Der er to oplagte udflugtsmål uden for Barcelona, hvor man kan se på parabelarkitektur:

1. Man kan besøge **Cordorníu**, det catalonske center for fremstilling af Cava som, hvis der ikke er franskmænd tilstede, man kan opfatte som den spanske variant af Champagne! Hovedkvarteret er bygget af den spanske arkitekt Josep Puig i Cadafalch i perioden 1895 til 1915:



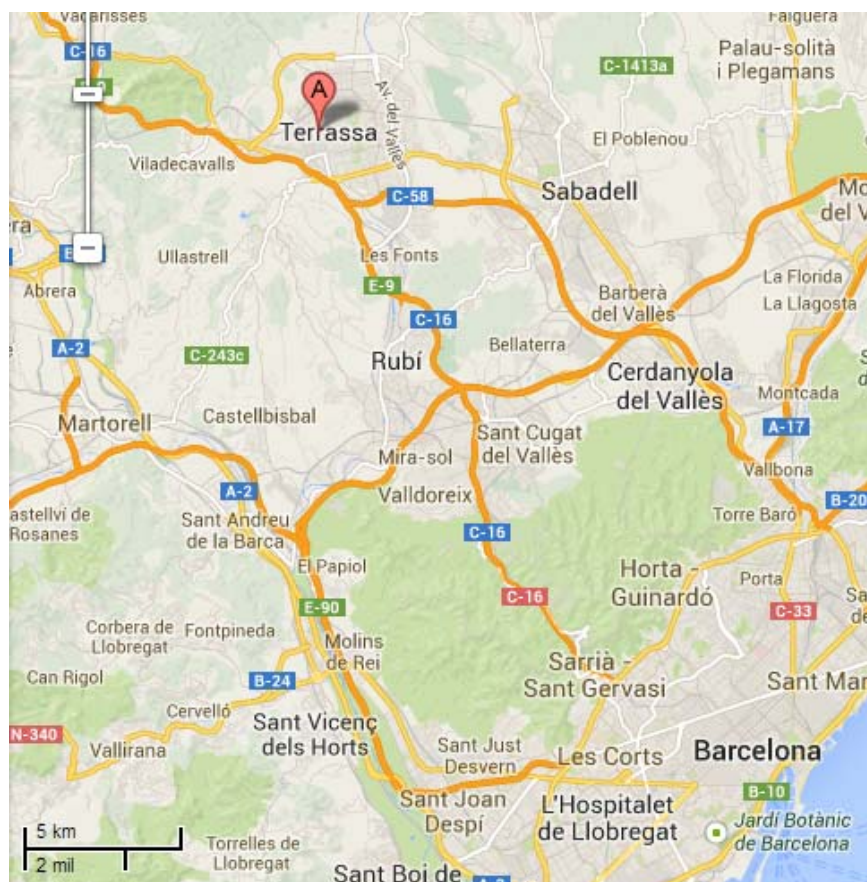
Her er et par smagsprøver:



Øvelse 1.1

- a) Prøv nu selv om du kan finde nogle parabel-hvælvinger i Cordorniu ☺

2. Man kan besøge Masía Freixa i Terrassa, som er det mest yndige parabelhus man kan forestille sig – Matematikkens svar på pandekagehuset i eventyret om Hans og Grete. Det var oprindeligt et privat hus bygget af arkitekten Lluís Muncunill i 1896 og udbygget i 1907-1914.



Her er igen et par smagsprøver:



Øvelse 1.2

- a) Prøv nu selv om du kan finde nogle parabel-hvælvinger i parabelhuset ☺

1.2 Parablens og kædelinjens egenskaber

Parablen er som bekendt defineret som kurven med en ligning af formen $y = a \cdot x^2$ i et passende valgt koordinatsystem, hvor den har toppunkt i $(0,0)$ og y -aksen som symmetriakse. Den kan også karakteriseres ud fra et brændpunkt og en ledelinje, men det er knap så relevant for os. Vi vil senere i afsnit 1.3 skitsere en simpel geometrisk konstruktion af parabler, der bygger på parablens rekursive struktur. Her vil vi i stedet fokusere på en hovedegenskab ved parabler. Vi varmer op med en øvelse:

Øvelse 1.3:

- Åbn et graf-værksted og tegn grafen for prototypen $g(x) = x^2$
- Opret en skyder for variablen k og tegn også grafen for den almene parabel $f(x) = k \cdot x^2$
- Opret et tilfældigt punkt P på enhedsparablen $y = x^2$. Opret halvlinjen gennem Origo $(0,0)$ og grafpunktet P . Konstruer skæringspunktet Q mellem halvlinjen og den almene parabel $y = k \cdot x^2$.
- Mål forholdet mellem længderne OP og OQ , dvs. OP / OQ . Træk i grafpunktet P . Træk i skyderen k .
- Konklusion?

Sætning 1: Der findes kun én parabel

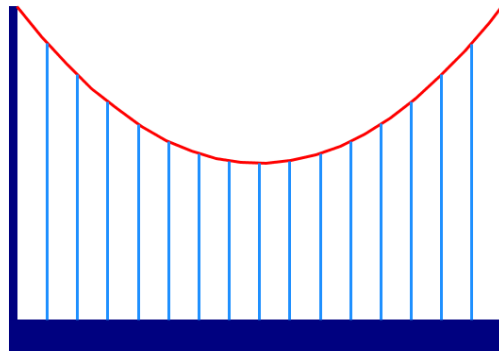
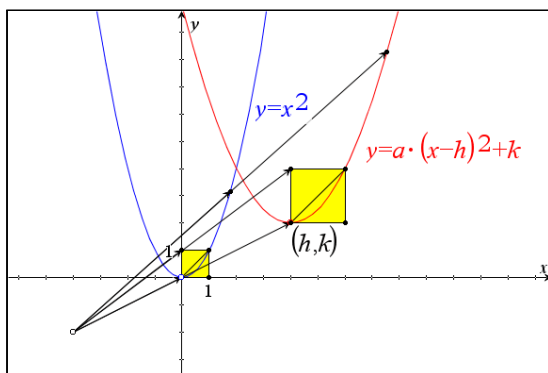
Alle parabler er ligedannede

Bevis: Hvis vi starter med enhedsparablen, dvs. grafen for kvadratkfunktionen $g(x) = x^2$, så vil grafen ved en ligedannethed omkring $(0,0)$ med multiplikationsfaktoren s overføres i $f(x) = s \cdot g(\frac{x}{s}) = s \cdot (\frac{x}{s})^2 = \frac{1}{s} \cdot x^2$. Sætter vi $s = \frac{1}{a}$ fås netop den generelle forskrift $g(x) = a \cdot x^2$. ☺

Derudover kan vi parallelforskyde parablen. Bruges forskydningsvektoren $\{h, k\}$ overføres parablen til grafen for forskriften $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$. I et almindeligt koordinatsystem hvor parablens akse er lodret er parablen altså karakteriseret ved en tre-parameter forskrift, hvor den ene parameter a kommer fra en ligedannethed, og de to andre parametre h og k kommer fra parallelforskydninger. Endelig kan man forestille sig at parablen drejes. I så fald bliver forskriften mere kompliceret, og parablen er da faktisk graf for to funktioner. Men det venter vi med at se nærmere på ☺.

Sætning 2: Den generelle ligning for en lodret parabel

En lodret parabel med skalafaktor $1/a$ og toppunkt i (h, k) har ligningen $y = a \cdot (x - h)^2 + k$.



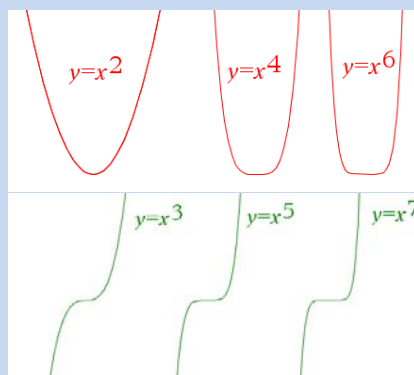
Bemærkning: Parablens tangenthældning er givet ved $f'(x) = 2a \cdot (x - h) + k$, dvs. den er *lineær* i det vandrette stykke langs x -aksen, eller tilsvarende stykket langs den vandrette tangent i toppunktet. Parablen kan bruges som en model for en bro, hvor al massen er koncentreret i det vandrette brofag, hvorfor *belastningen* netop afhænger lineært af stykket langs brofaget.

Der findes imidlertid en anden kurve, *kædelinjen*, som minder meget om parablen. Den er også karakteriseret ved tre parametre: En lighedannethedsparameter a og to forskydningsparametre h og k . Slægtskabet mellem parablen og kædelinjen bliver første gang kommenteret i Galileis "Dialog om to nye videnskaber", hvor Galilei bruger kædelinjer til at tegne parabellignende kurver. Før vi ser nærmere på dette vil vi præsentere *kædelinjen*.

Udgangspunktet er grafen for den naturlige eksponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ med grundtallet $e = 2.718...$ Denne graf er ikke symmetrisk, men den kan spaltes i en sum af to nært beslægtede grafer, hvor den ene er symmetrisk omkring y-aksen og den anden er symmetrisk omkring Origo.

Definition 1: Lige og ulige funktioner

- Hvis grafen for en funktion $f(x)$ er symmetrisk omkring y-aksen opfylder den betingelsen $f(-x) = f(x)$. Eksempler er alle potensfunktioner med lige eksponent: $x^2, x^4, x^6, \dots$ En sådan funktion kaldes derfor en *lige funktion*.
- Hvis grafen for en funktion $f(x)$ er symmetrisk omkring Origo opfylder den betingelsen $f(-x) = -f(x)$. Eksempler er alle potensfunktioner med ulige eksponent: $x^3, x^5, x^7, \dots$ En sådan funktion kaldes derfor for en *ulige funktion*.



Vi ønsker nu at spalte den naturlige eksponentialfunktion som en sum af en lige og en ulige funktion:

$$e^x = f_{\text{lige}}(x) + f_{\text{ulige}}(x)$$

Der gælder derfor

$$e^{-x} = f_{\text{lige}}(-x) + f_{\text{ulige}}(-x) = f_{\text{lige}}(x) - f_{\text{ulige}}(x)$$

Lægger vi ligningerne sammen og trækker vi dem tilsvarende fra hinanden, finder vi derfor:

$$f_{\text{lige}}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad f_{\text{ulige}}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Øvelse 1.4:

- a) Gør rede for at den generelle opspaltning af en funktion $f(x)$ i en lige og en ulige del er givet ved:

$$f_{\text{lige}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_{\text{ulige}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

- b) Hvad bliver opspaltningen af et polynomium $p(x)$, fx

$$p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 ?$$

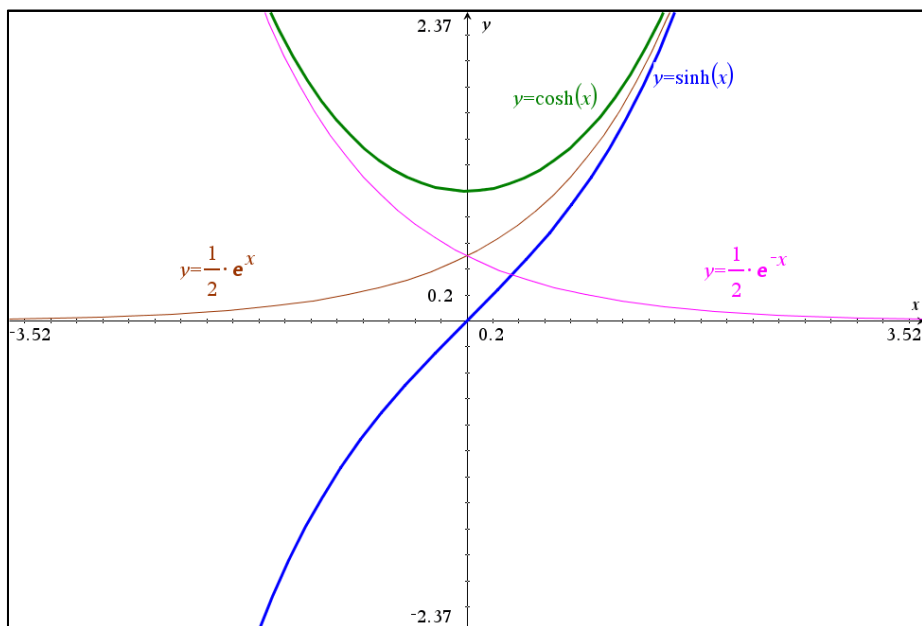
Disse to komponenter af den naturlige eksponentialfunktion er så vigtige i sig selv at de har fået tildelt særskilte navne:

Definition 2: Hyperbolsk cosinus og sinus

Den lige del af den naturlige eksponentialfunktion kaldes *hyperbolsk cosinus*, dvs. $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$.

Den ulige del af den naturlige eksponentialfunktion kaldes *hyperbolsk sinus*, dvs. $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$.

De er begge indbyggede i TI-Nspire CAS, så vi kan nemt tegne graferne:



Vi ser da at grafen for $\cosh(x)$ er parabellignende, og at den asymptotisk ligner grafen for en eksponentialfunktion: For store positive værdier af x , smelter den sammen med grafen for $1/2 \cdot e^x$, for store negative værdier af x smelter den tilsvarende sammen med grafen for $1/2 \cdot e^{-x}$. Da de to hyperbolske trigonometriske funktioner fremkommer ved en spaltning af den naturlige eksponentialfunktion gælder der

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$

Vi lægger også mærke til at da e^x og e^{-x} er indbyrdes reciprokke gælder der:

$$1 = e^x \cdot e^{-x} = (\cosh(x) + \sinh(x)) \cdot (\cosh(x) - \sinh(x)) = \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2$$

Det er blot den første af en lang række formler, der minder meget om de tilsvarende trigonometriske formler, i dette tilfælde den pythagoræiske identitet $1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$.

Øvelse 1.5:

- a) Vis ved at bruge reglerne for differentiation af den naturlige eksponentialfunktion at der gælder:

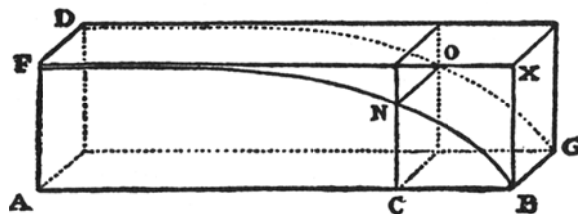
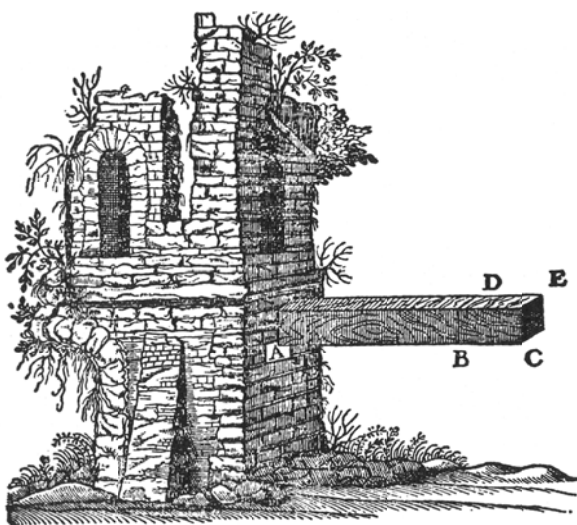
$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

Definition 3: Kædelinjen

En kædelinje er en kurve, der er ligedannet med grafen for den hyperbolske cosinusfunktion. Den generelle forskrift for en lodret kædelinje med skalafaktor a og toppunkt i (h, k) er derfor givet ved

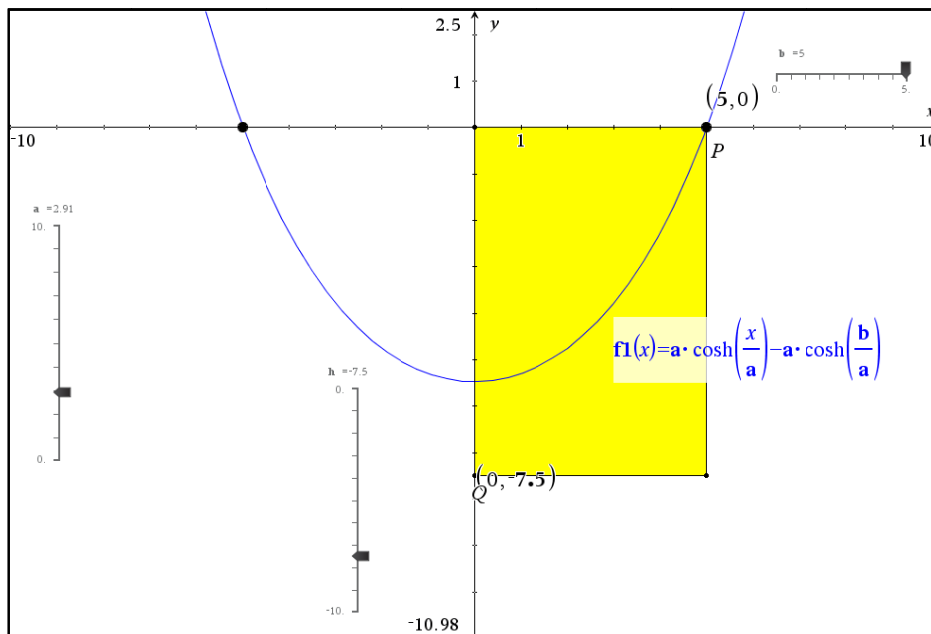
$$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x-h}{a}\right) + k$$



Vi er nu klar til at se nærmere på Galileis bemærkninger om brugen af kædelinjer til at tegne parabler. Galilei ønskede at tegne parabler uden brug af passer og lineal ved hjælp af fysiske instrumenter. På den anden dag i dialogen kigger han på bjælker af form som prismer og undersøger deres brudstyrke. Han kommer da frem til at man kan skære en del af prismet bort af form som en parabel og stadigvæk have den samme brudstyrke overalt i bjælken. For at hjælpe værktøjsmageren med at skære det rigtige udsnit væk af prismet skal han derfor have tegnet en parabel på prismets side $FABX$, hvor parablen har toppunkt i B . Han foreslår da følgende to metoder:

- 1) Man tager en messingkugle af størrelse som en valnød og lader den rulle på et metalspejl, der holdes næste lodret. Messingkuglen vil da aftegne et tyndt parabelspor.
- 2) Man tager en kæde og hænger den op i to søm, der sidder vandret ud for hinanden i en afstand som netop er det dobbelte af prismets bredde. Man lader nu kæden glide ned indtil højden af kædelinjen netop svarer til prismets længde. Kæden vil da omtrentligt have form som en parabel.

Mens den første metode med den rullende kugle rent faktisk giver en parabel, så vil den anden kun føre til en parabellignende figur, som vi nu vil undersøge nærmere.



Øvelse 1.6:

- Åbn et graf-værksted og afsæt et vilkårligt punkt P på x -aksen med koordinaterne $(b, 0)$, hvor b er prismets bredde. Afsæt tilsvarende et vilkårligt punkt Q på y -aksen med koordinaterne $(0, -h)$, hvor h er prismets højde. Prismets front svarer da til rektanglet udspændt af punkterne P og Q . Vi skal da forestille os at vi sætter søm i punktet P og dets spejlbillede $P'(-b, 0)$ på y -aksen.
- Gør rede for at en kædelinje gennem de to søm P og P' må have en forskrift på formen
$$f(x) = a \cdot \cosh(x/a) - a \cdot \cosh(b/a)$$

Tegn grafen for denne kædelinje med brug af en skyder for variabelen a .
- Tilpas skydervariabelen a , så kædelinjen går gennem punktet Q .

Dermed har vi simuleret Galileis tegning af kædelinjen på prismets front. Det er imidlertid lidt bøvlet, at vi skal søge os frem til den rigtige længde af kædelinjen. Vi benytter derfor den følgende variant til at få mere styr på konstruktionen:

Øvelse 1.7:

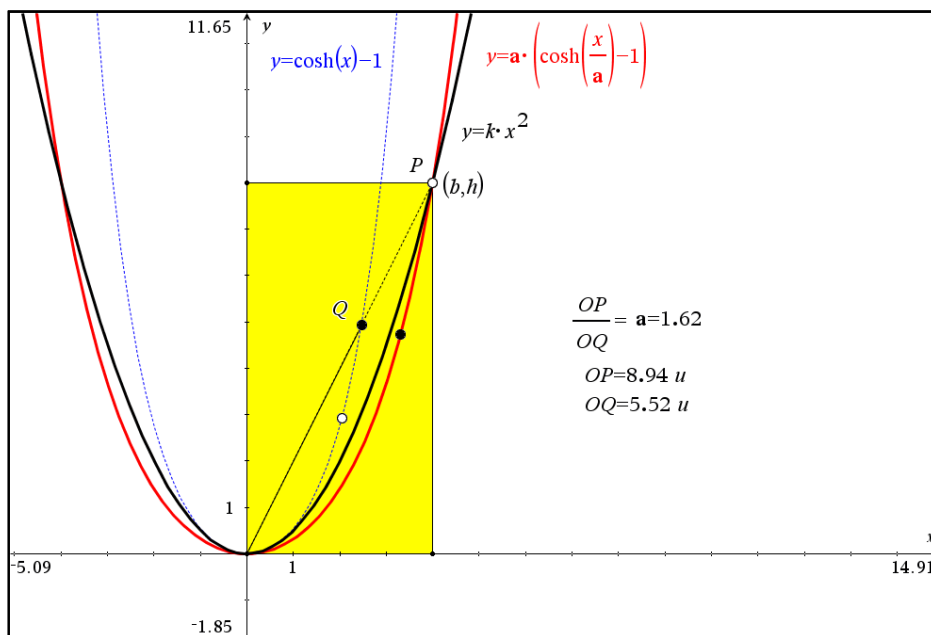
- Åbn et graf-værksted og afsæt et vilkårligt punkt P i første kvadrant med koordinaterne (b, h) , hvor b er prismets bredde og h er prismets højde. Prismets front svarer da til rektanglet udspændt af Origo $(0, 0)$ og hjørnepunktet $P(b, h)$. Denne gang tager vi udgangspunktet i Origo som er kædelinjens toppunkt.
- Gør rede for at en kædelinje med toppunkt i Origo og y -aksen som symmetriakse har en forskrift på formen

$$f(x) = a \cdot \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)$$

Vi skal altså finde den parameterværdi a , der sikrer at kædelinjen netop går gennem P .

- Tegn enhedskædelinjen $y = \cosh(x) - 1$ og bestem skæringspunktet Q med linjen $y = \frac{h}{b} \cdot x$, der forbinder Origo med hjørnepunktet P .
- Bestem forholdet OP/OQ . Multiplikationen omkring Origo med forstørrelsesfaktoren OP/OQ fører skæringspunktet Q over i hjørnepunktet P og vil derfor også føre enhedskædelinjen over i den søgte kædelinje. Konstruer kædelinjen som det geometriske sted drevet af et frit punkt på enhedskædelinjen og dets billedpunkt ved multiplikationen.
- Tegn også grafen for kædelinjen ud fra dens forskrift, idet skalafaktoren a jo netop er multiplikationsfaktoren.
- Tegn endelig grafen for den parabel $y = k \cdot x^2$ der forbinder Origo med hjørnepunktet P . Sammenlign parablen med kædelinjen, der forbinder Origo med hjørnepunktet P . Konklusion?

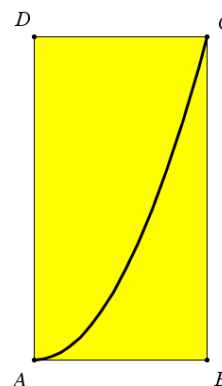
Muligvis blev du skuffet, da du sammenlignede parablen og kædelinjen, der forbandt Origo med hjørnepunktet, for der er normalt tydelig forskel på de to! Men husk at Galilei ikke var specielt interesseret i en eksakt tegnerutine, men i en praktisk tegnerutine, der kan anvendes umiddelbart af en almindelig håndværker uden adgang til specielt udstyr. Galilei kunne sagtens konstruere en stribe punkter eksakt ved hjælp af passer og lineal, men det ville være både være kompliceret at forklare dette til håndværkeren og det ville også være omstændeligt, mens enhver god håndværker ville kunne hænge en kæde op og tegne profilen af på prismet.



Øvelse 1.8: En simpel geometrisk konstruktion af en parabel som et geometrisk sted

Der er givet et rektangel $ABCD$. Undersøg nu den følgende simple geometriske konstruktion af parabeln, der har toppunkt i det nederste venstre hjørnepunkt A af rektanglet $ABCD$ og som går gennem det øverste højre hjørnepunkt C .

- Konstruer diagonalen AC . Afsæt et frit punkt P på grundlinjen AB . Overfør det frie punkt til diagonalen AC ved hjælp af den lodrette vinkelrette linje fra P på grundlinjen AB . Den lodrette linje skærer diagonalen i Q .
- Overfør diagonalpunktet Q til siden BC ved hjælp af den vandrette vinkelrette linje fra Q på siden BC . Den vandrette linje skærer siden i R .
- Forbind nu sidepunktet R med det nederste venstre hjørnepunkt A og konstruer skæringspunktet mellem linjestykket AR og den lodrette vinkelrette linje gennem P . Skæringspunktet kaldes S .
- Konstruer det geometriske sted for skæringspunktet S drevet af det frie punkt P . Gør rede for, at der netop er tale om parabeln med toppunkt i A som har den vandrette side AB som tangent, den lodrette side AD som akse og som går gennem det sidste hjørnepunkt C .

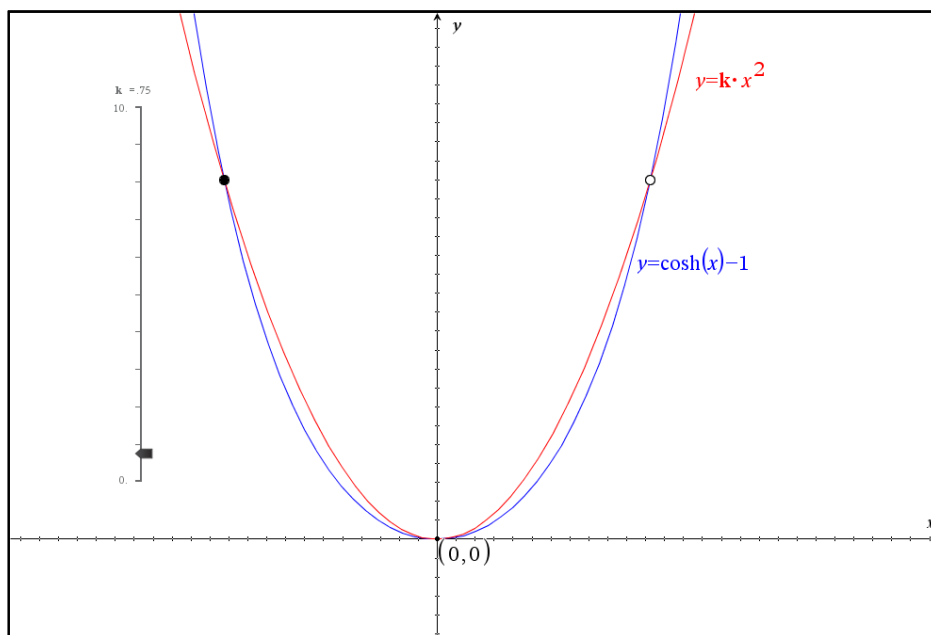


Men kunne Galilei så være sikker på at håndværkeren ikke kom til at skære for meget af? Ja, det kunne han, for han kunne eksperimentere sig frem til at *kædelinjen altid ligger uden på parabeln*, dvs. under parabeln, indenfor prismet! Der gælder altså følgende bemærkelsesværdige sætning (som Galilei naturligvis ikke var i stand til at vise, da han ikke engang kendte forskriften for en kædelinje ☺ - den blev først fundet halvtreds år senere af bl.a. Bernoulli).

Sætning 3: Kædelinje versus parabel

Hvis der er givet en kædelinje og en parabel, med fælles toppunkt og fælles akse så vil kædelinjen højst skære parabeln én gang på hver side af akse og på stykket mellem toppunktet og skæringspunktet vil kædelinjen ligge nederst.

Beviset er ikke helt simpelt!



Bevis: Da parabeln og kædelinjen begge er entydigt bestemt op til en lighedannethed er det nok at vi viser sætningen for enhedskædelinjen! Vi lægger enhedskædelinjen med toppunkt i Origo og y -aksen som symmetriakse. Den har altså forskriften $g(x) = \cosh(x) - 1$. En parabel med samme toppunkt og samme akse har da en forskrift på formen $f(x) = k \cdot x^2$. Hvis parabeln ligesom kædelinjen skal ligge i første og anden kvadrant ved vi ydermere at k er positiv. Vi stiler nu mod at vise, at hvis kædelinjen starter med at ligge over parabeln til højre for Origo vil den vedblive med at ligge over parabeln, dvs. der vil ikke være nogen skæringspunkter i første kvadrant. Dette indtræffer, når $k \leq \frac{1}{2}$. Hvis kædelinjen tilsvarende starter med at ligge under parabeln til højre for Origo, så vil den skære netop én gang i første kvadrant. Dette indtræffer, når $k > \frac{1}{2}$. Først bemærker vi, at kædelinjen altid ender med at ligge øverst, da den asymptotisk vokser eksponentielt! Dernæst bemærker vi at både kædelinjen og parabeln har toppunkt i Origo med vandret tangent. Det bliver derfor krumningen/hulheden der afgør, hvem der kommer bedst fra start. Differentierer vi to gange finder vi:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \cosh(x) & \rightarrow & \quad g''(0) = 1 \\ f''(x) &= 2k & \rightarrow & \quad f''(0) = 2k \end{aligned}$$

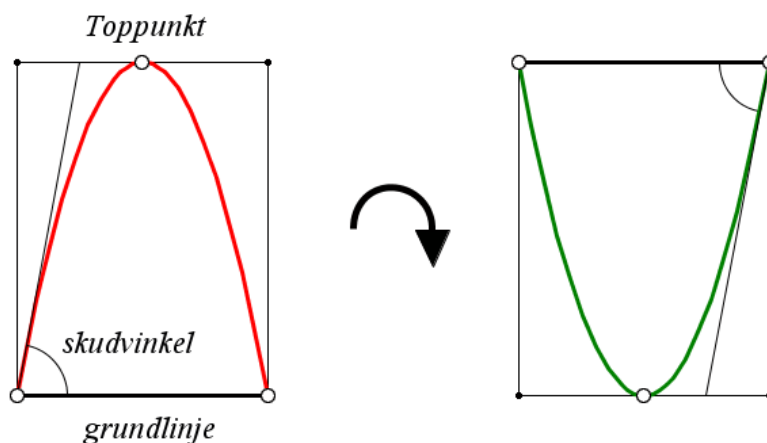
Det viser for det første at f har den største hulhed i Origo, når $k > \frac{1}{2}$, dvs. parabeln ligger øverst lige til højre for Origo, når $k > \frac{1}{2}$. Men hulheden er konstant for parabeln, mens den vokser ubegrænset for kædelinjen. Kædelinjen svinger derfor ind over parabeln, skærer den og fjerner sig mere og mere fra den.

For det andet ser vi at kædelinjen har den største hulhed i Origo, når $k < \frac{1}{2}$, dvs. kædelinjen ligger øverst lige til højre for Origo, når $k < \frac{1}{2}$. Men hulheden er konstant for parabeln, men voksende for kædelinjen, dvs. kædelinjen svinger hele tiden mere end parabeln, og den svinger derfor væk fra parabeln og der er derfor ingen skæring.

Hvis $k = \frac{1}{2}$ har de samme hulhed og vi må derfor kigge på de højere afledede for at afgøre, hvem der kommer bedst fra start:

$$\begin{aligned}
g'''(x) &= \sinh(x) \rightarrow g'''(0) = 0 \\
f'''(x) &= 0 \rightarrow f'''(0) = 0 \\
g'''(x) &= \cosh(x) \rightarrow g'''(0) = 1 \\
f'''(x) &= 0 \rightarrow f'''(0) = 0
\end{aligned}$$

Så vi skal helt frem til den fjerde afledede før der er forskel! Kædelinjen har positiv fjerdeafledet, mens parablen har nul som den fjerdeafledede. Altså er det kædelinjen der kommer bedst fra start, og da dens hulhed er voksende svinger den væk fra parablen. ☺



Det andet sted, hvor Galilei omtaler parablen versus kædelinjen er den fjerde dag efter at have opbygget tabeller for kasteparablerne, hvor han skriver:

”Desuden må jeg lige fortælle noget, som vil både overraske jer og glæde jer, nemlig at en kæde, der strammes mere eller mindre følger en kurve, som med god tilnærmelse ligner en parabel. Dette slægtskab ses tydeligt, hvis parablen tegnes i en lodret plan og vendes på hovedet med toppunktet i bunden og grundlinjen stadig liggende vandret. For hænger man en kæde op under grundlinjen med enderne fastnet til de to yderpunkter for grundlinjen kan man ved at løsne kæden mere eller mindre få den til at bøje så den tilpasser sig parablen; og ligheden er desto større hvis parablen tegnes med mindre krumning eller så at sige mere udstrakt; så hvis man bruger parabler med skudvinkel under 45° passer den næsten perfekt til parablen.”

Øvelse 1.9: Udfør Galileis eksperiment! Indtegn gerne nogle forskellige parabler på baggrund af et koordinatsystem, så du også kan aflæse koordinaterne til en serie udvalgte punkter på kædelinjen og dermed kontrollere, hvor godt de passer med den forventede forskrift.

Ifølge Galilei er det altså afgørende for hvor godt man kan tilpasse en kædelinje til en parabel, at man holder hældningen for parablen under 1.

Definition 4: Skulderpunkter og bugen for en parabel

De punkter, hvor parablen netop har hældning 1 kaldes parablens *skulderpunkter*. Midtpunktet mellem skulderpunkterne kaldes parablens *brændpunkt*. Parabelbuen mellem skulderpunkterne kaldes parablens *bug*.

Galilei påstår altså at så længe man holder sig til parablens bug, så kan man tilpasse den med tilpas præcision med en kædelinje. Det er selvfølgelig ikke et eksakt udsagn, men en tommelfingerregel som Galilei altså lagde stor vægt på.

Øvelse 1.10:

- Gør rede for at skulderpunkterne for en enhedsparabel $y = x^2$ er givet ved $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ og $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, således at bugen for enhedsparablen ligger på stykket fra $-\frac{1}{2}$ til $\frac{1}{2}$ som netop har længden 1.
- Gør rede for at brændpunktet F (for fokus) er givet ved $(0, \frac{1}{4})$. Den vandrette linje, der ligger modsat toppunktet i samme afstand, dvs. $y = -\frac{1}{4}$ kaldes parablens ledelinje l . Gør rede for at punkterne på parablen har samme afstand til brændpunktet og ledelinjen.
- Gør rede for at skulderpunkterne for en vilkårlig parabel med lodret akse fremkommer som skæring mellem parablen og linjerne gennem toppunktet med hældning $\pm \frac{1}{2}$.

Ifølge den ovenstående øvelse ser vi altså, at der gælder:

Sætning 4: Udstrækningen af parablens bug

Bugen for en vilkårlig parabel er indeholdt i et rektangel med en højde der kun er en fjerdedel af grundlinjen.

Vi kan nu overføre de samme begreber til en kædelinje:

Definition 5: Skulderpunkter og bugen for en kædelinje

De punkter, hvor kædelinjen netop har hældning 1 kaldes kædelinjens *skulderpunkter*. Kædelinjebugen mellem skulderpunkterne kaldes kædelinjens *bug*.

Øvelse 1.11:

- Gør rede for at skulderpunkterne for en enhedskædelinjen $y = \cosh(x) - 1$ er givet ved $(-\ln(\sqrt{2} + 1), \sqrt{2} - 1) \approx (-0.88, 0.41)$ og $(\ln(\sqrt{2} + 1), \sqrt{2} - 1) \approx (0.88, 0.41)$, således at bugen for enhedskædelinjen ligger på stykket fra $-\ln(\sqrt{2} + 1) \approx -0.88$ til $\ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0.88$. Prøv også om du kan gøre rede for at buelængden for bugen netop er 2!
- Gør rede for at skulderpunkterne for en vilkårlig kædelinje med lodret akse fremkommer som skæring mellem kædelinjen og linjerne gennem toppunktet med hældning $\pm \frac{\sqrt{2} - 1}{\ln(\sqrt{2} + 1)} \approx 0.47$.

I følge øvelsen kan bugen for en vilkårlig kædelinje med lodret akse altså med god tilnærmelse afgrænses ved at tegne linjer gennem toppunktet med hældning ± 0.5 , præcis som det var tilfældet for parablerne.

For nu at undersøge hvor god overensstemmelsen er mellem kædelinjer og parabler vil vi tage udgangspunkt i enhedskædelinjen og se nærmere på bugen, dvs. stykket fra -0.88 til 0.88.

Øvelse 1.12:

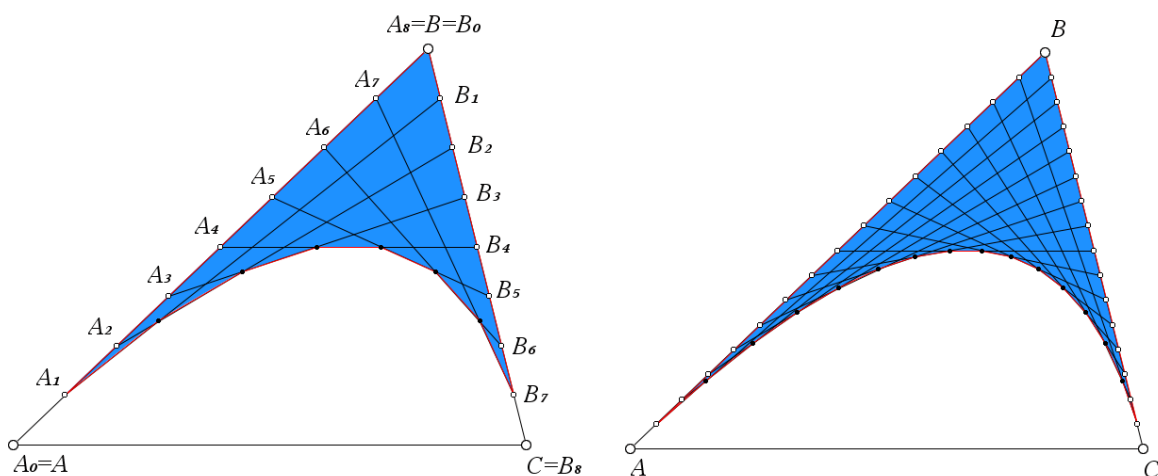
- Åbn et graf-værksted og tegn grafen for enhedskædelinjen $y = \cosh(x) - 1$ og marker bugen.
- Åbn et Lister- og Regnarkværksted og opret listerne **x_data** := $\{-0.85, -0.75, \dots, 0.75, 0.85\}$ og **y_data** := $\cosh(\mathbf{x_data}) - 1$. Udfør en andengradsregression på de to lister og bestem derved en forskrift for det andegradspolynomium, der bedst tilnærmer enhedskædelinjen på bugen. Hvor store er residualerne?
- Tegn også grafen for det approksimerende andengradspolynomium i samme koordinatsystem som enhedskædelinjen, så man kan vurdere overensstemmelsen.
- Konklusion?

1.3 Kunsten at sy en parabel

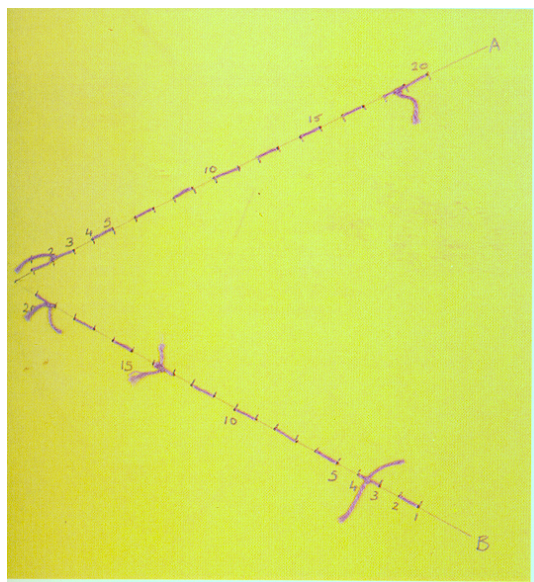
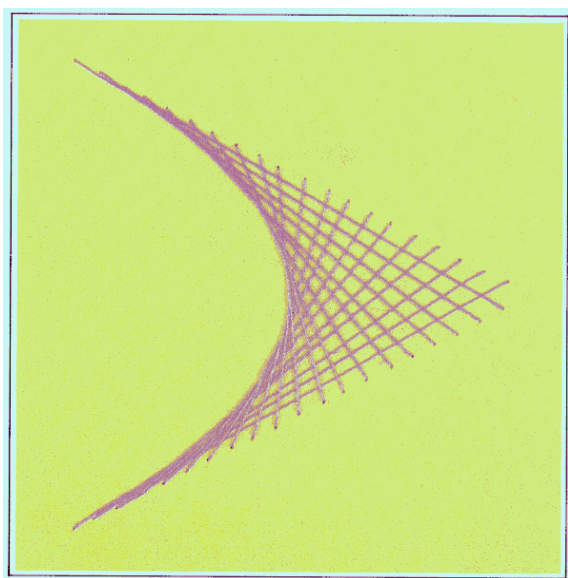
Vi er nu klar til den vigtigste geometriske konstruktion af parabelbuer, der også ligger bag Gaudis arkitektur. Vi lægger ud med nogle eksperimenter:

Øvelse 1.13: Parabelsyning

- a) Konstruer en tilfældig trekant ABC . Del herefter de to sider AB og BC i lige mange dele, fx 8 dele. De otte delepunkter nummereres $A_0 = A, A_1, \dots, A_7, A_8 = B$, henholdsvis $B_0 = B, B_1, \dots, B_7, B_8 = C$. Derefter trækkes linjestykkerne $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_8B_8$. Resultatet er en figur, hvor linjestykkerne tydeligvis indkranser en fælles kurve. Jo flere punkter jo tydeligere figur ☺



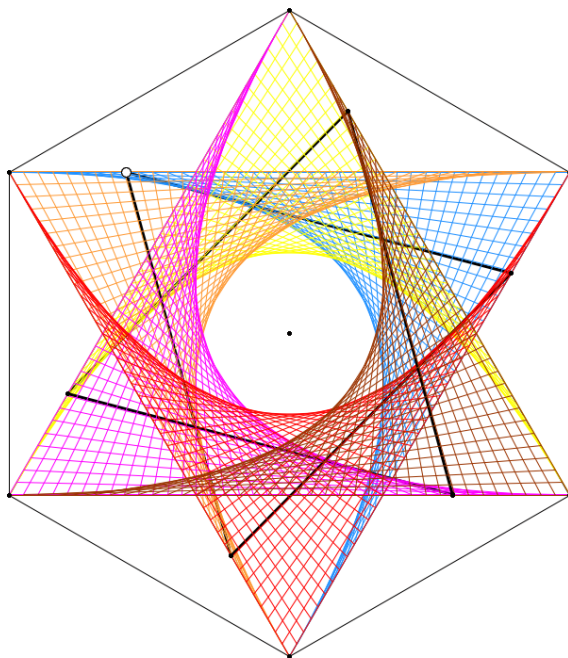
- b) Det er også nemt at sy den pågældende figur, idet man stikker en nål igennem delepunkterne og forbinder delepunkterne på tværs af de to linjer på forsiden af papstykket og på langs af de to linjer på bagsiden af papstykket. Det er en fornøjelig aktivitet såvel med nål og tråd som med et geometriprogram ☺



Den foregående øvelse rejser umiddelbart nogle fundamentale spørgsmål:

- Det ligner godt nok en parabelbue, men er det virkelig en parabelbue?
- Og hvilken rolle spiller siderne AB og BC ? De kunne godt ligne tangenter til parablen, men er det nu virkeligt tilfældet?

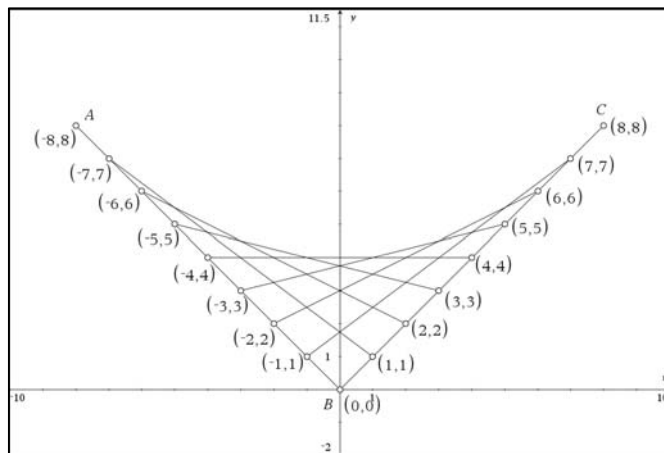
Hvis svaret er bekræftende har vi en simpel konstruktion til at konstruere parabelbuen, der forbinder to tangenter og dermed til at indskrive parabelbuer i trekanter (og videre herfra til at indskrive parabelbuer i vilkårlige polygoner).



Vi fortsætter vores eksperimenter med at lægge konstruktionen ind i et koordinatsystem. Vi kan da dels prøve om man kan gætte ligningen for den pågældende parabel ud fra tre særligt pæne punkter på parabelbuen og se om den passer. Dels kan vi prøve at finde en hel stribe punkter langs kurven og så forsøge sig med en kvadratisk regression.

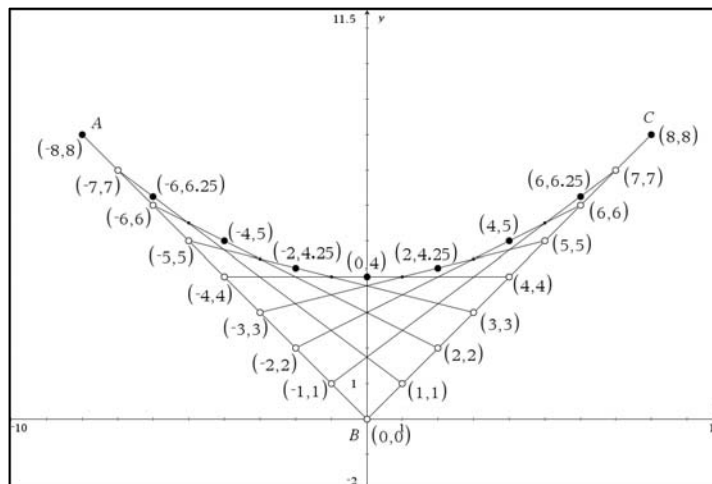
Øvelse 1.14:

- a) Som udgangspunkt for et sådant gæt kan det betale sig at arbejde med en meget simpel konfiguration i et koordinatsystem. Fx kan vi lade linjestykkerne ligge fra $A(-8,8)$ til $B(0,0)$ og fra $B(0,0)$ til $C(8,8)$. Det gør det nemt at afsætte delepunkter og det giver anledning til en kurve, der ligger symmetrisk omkring y -aksen.



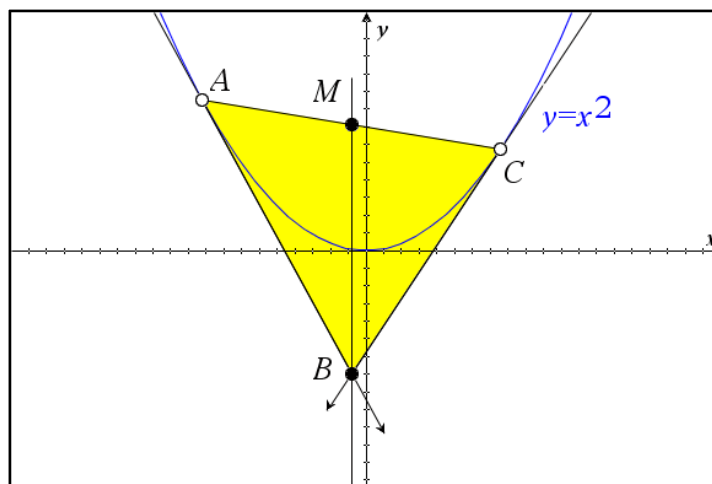
- b) Af symmetri Grunde ser det ud til at parabeln skærer y -aksen i 4. Find nu ligningen for den parabel, der går gennem $A(-8,8)$, $T(4,0)$ og $C(8,0)$. Hvordan passer den med indhylningskurven? Hvilke tangenter har din parabel i A , T og C ?

- c) For at komme tættere på parablen prøver vi nu at finde flere punkter på parablen og så se om de passer med en kvadratisk regression. Vi konstruerer derfor først de yderste skæringspunkter mellem sekanterne. Disse ligger *ikke* på parablen som sådan, da parablen tangerer inde mellem skæringspunkterne. Vi tilføjer derfor midtpunkterne mellem skæringspunkterne som vist på figuren:



- d) Prøv nu med en kvadratisk regression om du kan finde en parabel, der går gennem alle midtpunkterne. Konklusion?

På basis af øvelsen kigger vi nu videre på sammenhængen mellem parabelbuer og tangenter. Men vi vender nu problemstillingen på hovedet så vi tager udgangspunkt i parablen i stedet for i trekanten. Da alle parabler er ligedannede, kan vi nøjes med at undersøge enhedsparablen $y = x^2$. Vi frembringer da trekanten ABC ud fra to parabelpunkter A og C med tilhørende tangenter, som skærer hinanden i det tredje punkt B .



Øvelse 1.15:

- Tegn enhedsparablen $y = x^2$ og afsæt to tilfældige punkter A og C på parablen. Konstruer de tilhørende tangenter t_A og t_C samt deres tilhørende skæringspunkt B .
- Hvilken sammenhæng er der mellem x -koordinaterne for de tre trekantshjørner A , B og C ?

- c) Konstruer den lodrette linje gennem B . Hvor skærer den trekantens grundlinje AC ? Hvilken linje i trekanten er der så tale om?

Sætning 5: To tangenter til en parabel

Der er givet en parabel med to tangenter t_A og t_C , hvor A og C er røringspunkterne. De to tangenter skærer hinanden i et punkt B . Medianen fra B vil da netop være parallel med parablens akse, dvs. linjen gennem B parallel med parablens akse skærer grundlinjen AC i midtpunktet M .

Bevis: Da alle parabler er ligedannede kan vi nøjes med at vise sætningen for enhedsparablen $y = x^2$.

Tangenthældningerne i de to parabelpunkter A og C er derfor givet ved $2x_A$ og $2x_C$. Tangentligningerne hørende til røringspunkterne A og C er da tilsvarende givet ved

$$y = 2x_A \cdot (x - x_A) + x_A^2 = 2x_A \cdot x - x_A^2$$

$$y = 2x_C \cdot (x - x_C) + x_C^2 = 2x_C \cdot x - x_C^2$$

Skæringspunktet mellem de to tangenter har derfor x-koodinaten:

$$2x_A \cdot x - x_A^2 = 2x_C \cdot x - x_C^2$$

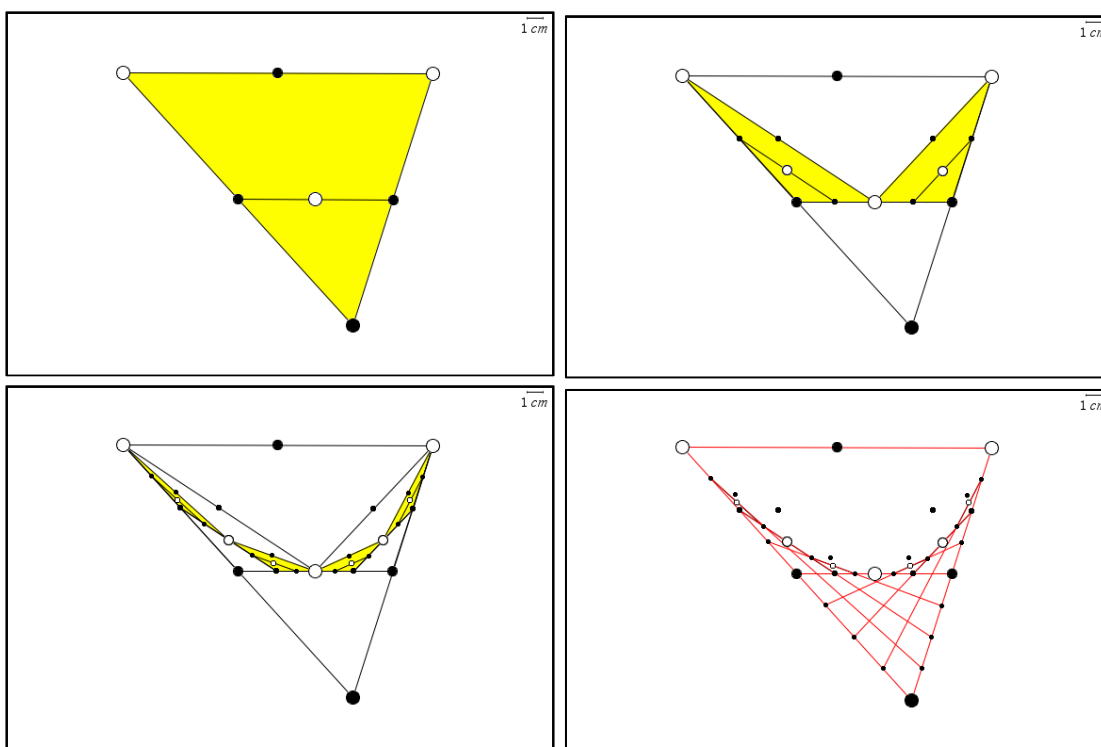
$$2 \cdot (x_A - x_C) \cdot x = x_A^2 - x_C^2 = (x_A - x_C) \cdot (x_A + x_C)$$

$$2 \cdot x = x_A + x_C$$

$$x = \frac{x_A + x_C}{2}$$

Heraf følger netop, at den lodrette linje gennem B skærer grundlinjen AC i midtpunktet M . ☺

Vi kan nu konstruere successive punkter på en parabel ved fortsat at 'halvere' trekanten, og derved skabe parablens omrids ved at 'trække perler på en snor'. Derved genskaber vi netop de samme figurer, som vi brugte til at sy en parabel med 2, 4, 8, ... delepunkter på siderne:

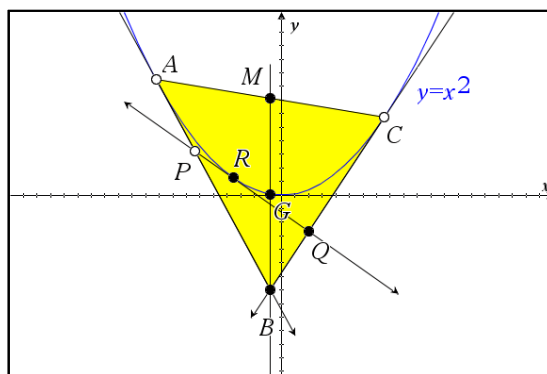


Øvelse 1.16:

- a) Prøv nu selv om du kan tegne en parabelbue i en trekant ved at trække parabelpunkterne som perler på en snor ☺

Bemærkning: Den ovenstående rekursive konstruktion af parabelpunkterne med successive trekanter, der hele tiden bliver 8 gange så små (målt på deres arealer) som de foregående har været kendt siden den græske oldtid. Det er fx udgangspunktet for Archimedes beregning af arealet indesluttet i parabelbuen.

For at få en kontinuert glidende konstruktion af parablen som et geometrisk sted udvider vi nu konstruktionen og inddrager et tredje parabelpunkt R med tilhørende tangent. Når R glider langs parablen svarer det netop til forbindelseslinjerne i syningen af parablen.



Øvelse 1.17:

- Tilføj et tredje parabelpunkt R med tilhørende tangent t_R .
- Denne tangent skærer tangenten fra A i punktet P og tangenten fra C i punktet Q . Undersøg forholdet $\frac{AP}{AB}$ sammenholdt med forholdet $\frac{BQ}{BC}$ ved at trække i punktet R .
- Konklusion? Hvorfor viser det, at tangenten fra R netop fungerer som forbindelseslinje mellem de to trekantsider i overensstemmelse med den måde vi syede parablen på i begyndelsen af afsnittet?
- Tilføj nu forholdet $\frac{PR}{PQ}$. Konklusion? Hvad viser det om røringspunktet for tangenten PQ ?

Den ovenstående øvelse udmøntes i den følgende sætning:

Sætning 6: Tre tangenter til en parabel

Der er givet en parabel med tre tangenter t_A , t_R og t_C , hvor A , R og C er røringspunkterne. De tre tangenter skærer hinanden i punkterne P , B og Q . Delepunkterne P , R og Q vil da dele de respektive tangentstykker AB , PQ og BC i det samme forhold $t = \frac{AP}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{BQ}{BC}$.

Bevis: Det er nok at bevise sætningen for enhedsparablen $y = x^2$, da alle parabler er ligedannede med enhedsparablen. Endvidere er det nok at vise, at forholdene mellem projektionerne af linjestykkerne på x -aksen er de samme, da den retvinklede projektion bevarer delingsforholdene. Fra sætningen om to tangenter til en parabel ved vi at x -koordinaten til skæringen mellem to tangenter netop er middelværdien af x -koordinaterne til røringspunkterne, dvs. der gælder:

$$x_P = \frac{x_A + x_R}{2}, \quad x_B = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad x_Q = \frac{x_R + x_C}{2}$$

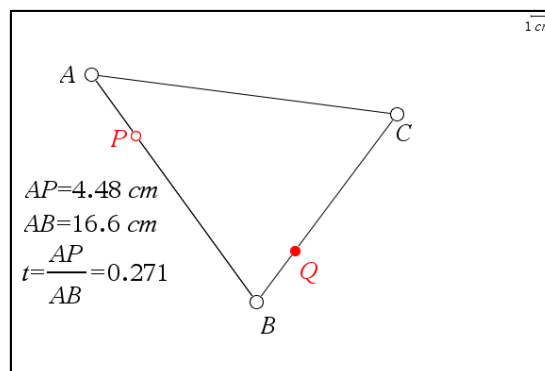
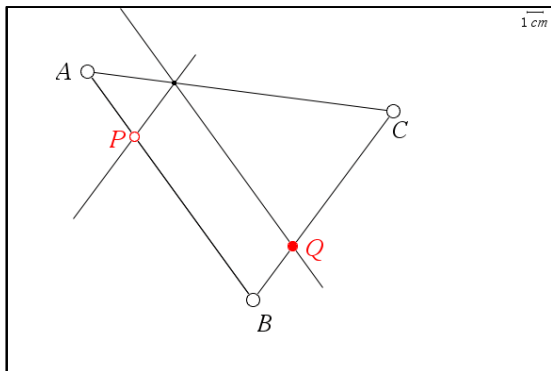
Heraf fås:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{x_A + x_R}{2} - x_A}{\frac{x_A + x_C}{2} - x_A} = \frac{\frac{x_R - x_A}{2}}{\frac{x_C - x_A}{2}} = \frac{x_R - x_A}{x_C - x_A}$$

Resten af beviset overlades til en øvelse ☺

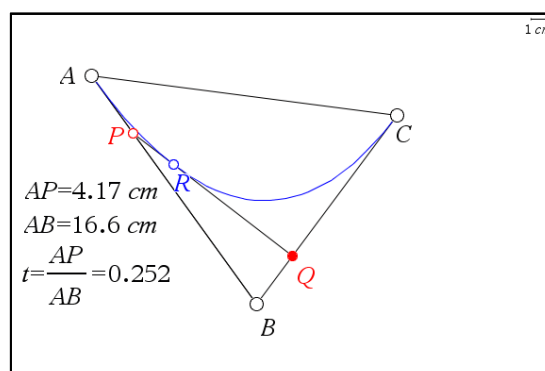
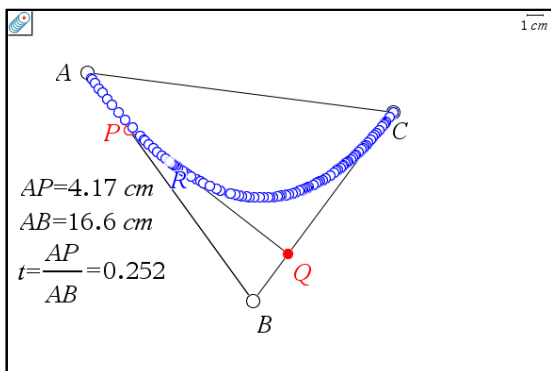
Øvelse 1.18: Afslutning af beviset!

- a) Vis nu selv på samme måde at der også gælder $\frac{PR}{PQ} = \frac{BQ}{BC} = \frac{x_R - x_A}{x_C - x_A}$.

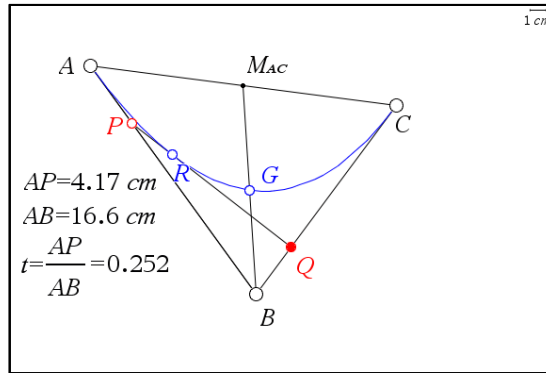


Vi er nu endeligt fremme ved konstruktionen af parabelbuen som et geometrisk sted! Udgangspunktet er trekanten ABC , hvor parabelbuen starter i A og slutter i C . Vi starter da med at dele siden AB med et delepunkt P . Vi skal nu finde det korresponderende delepunkt Q på siden BC . Det kan som vist på figuren gøres på snedig vis ved hjælp af parallelser, der først overfører delepunktet til siden AC og derefter til siden BC . Men det nemmeste er at bruge en multiplikation. Vi måler da sidelængderne AP og AB , hvorefter vi beregner forstørrelsesfaktoren $t = AP / AB$. Derefter finder vi Q ved at multiplicere punktet C med faktoren t ud fra punktet B (husk at angive multiplikationscentret B først!).

Derefter gør vi det samme med delepunktet R på forbindelsesstykket PQ . Vi kan da trække i delepunktet P og se at sporet for delepunktet R netop er parabelbuen og at forbindelsesstykket PQ netop glider langs parabelbuen som en tangent:



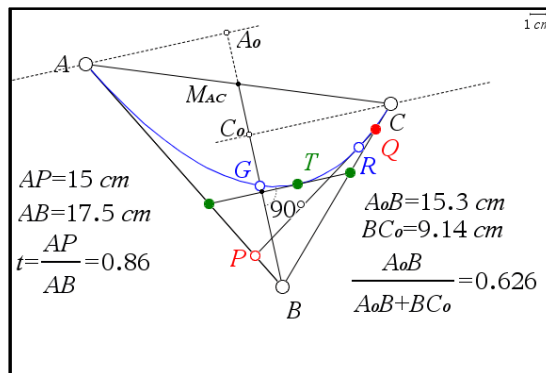
Men det simpleste er selvfølgelig som vist at konstruere parablen som et geometrisk sted frembragt af delepunktet R drevet af det frie punkt P .



Øvelse 1.19:

- a) Prøv nu selv at gennemføre den ovenstående konstruktion. Kontroller at parablen som forventet går gennem midtpunktet for medianen fra B . NB! Husk at punktet P skal afsættes på linjestykket AB og ikke på trekantsiden AB !

Medianen fra B er parallel med parablens akse. Med lidt øvelse kan man nu også konstruere parablens toppunkt, der jo er karakteriseret ved at tangenten står vinkelret på akse. Da tangenthældningen varierer lineært langs toppunktstangenten (x -aksen!) kan vi forholdsvis nemt finde det punkt, hvor tangenthældningen er nul:



Øvelse 1.20:

- a) Gør rede for at deleforholdet for parablens toppunkt er givet ved $t_{top} = \frac{A_0B}{A_0B + BC_0}$ hvor A_0 og C_0 er de vinkelrette projektioner af A og C på medianen fra B .
- b) Konstruer nu parablens toppunkt.

Hidtil har vi gennemført konstruktionen af parabelbuen rent geometrisk. Flytter vi konstruktionen ind i et koordinatsystem kan vi også nemt finde en parameterfremstilling for parabelen og tegne den som en parameterkurve. Det vil være særligt nyttigt for os, når vi senere skal se på paraboloider i rummet ☺

Vi udnytter da at når vi deler et linjestykke AB i forholdet t må delepunktet P være givet ved

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

I koordinater fås derfor

$$P - A = t \cdot (B - A)$$

$$P = A + t \cdot (B - A) = (1 - t) \cdot A + t \cdot B$$

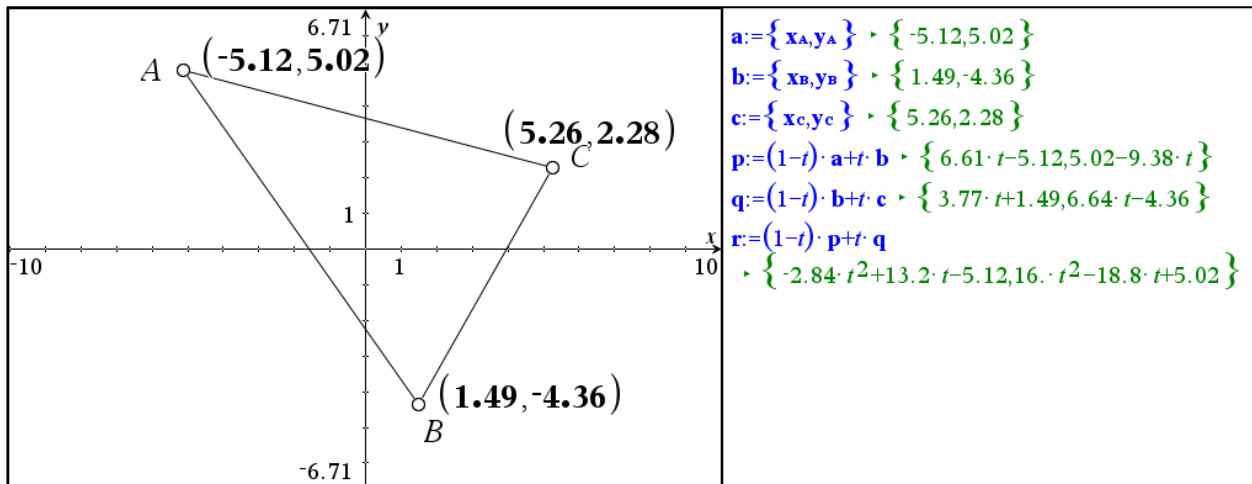
Men så kan vi nemt finde delepunkterne i trekanten ABC:

$$P = (1 - t) \cdot A + t \cdot B$$

$$Q = (1 - t) \cdot B + t \cdot C$$

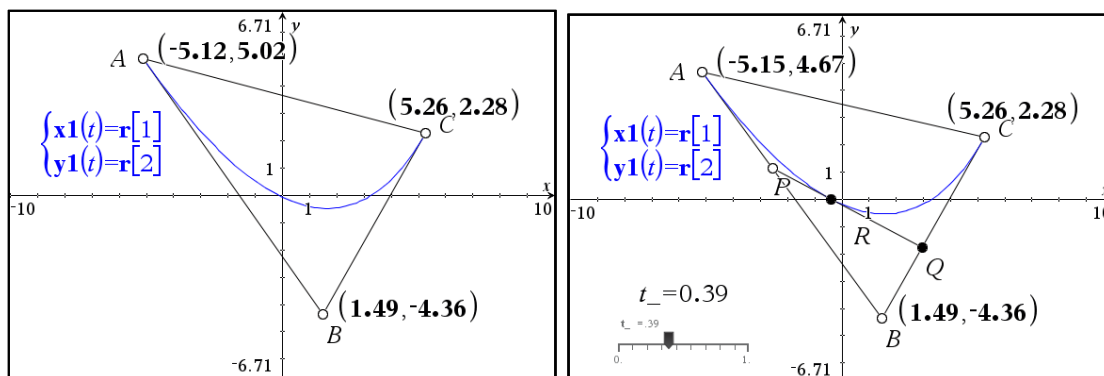
$$R = (1 - t) \cdot P + t \cdot Q$$

Lagrer vi koordinaterne til trekantens hjørner fås derfor:



Læg mærke til at delepunkterne P og Q har lineære parameterfremstillinger i overensstemmelse med at de kører langs linjestykkerne AB og BC, mens delepunktet R har kvadratiske parameterfremstillinger i overensstemmelse med at dette delepunkt kører langs en parabel!

Vi kan nu nemt tegne parameterkurven frembragt af R ud fra dens parameterfremstilling:



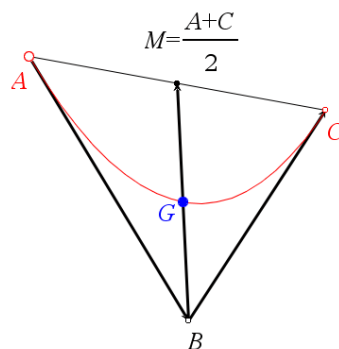
Vi kan endda som vist sammenholde den med den rent geometriske konstruktion. Vi indfører da en skyder for parameteren. Skydervariablen kaldes t_- med understregning på for ikke at forveksle den med variabelen t , der jo er reserveret til parameterfremstillingen! Indføres en tekstboks for t_- kan vi udregne tekstboksens værdi som skydervariablens værdi, så vi kan referere til den i multiplikationerne.

Øvelse 1.21:

- Prøv nu selv først at konstruere parabelbuen som en parameterkurve og dernæst at sammenholde den med den geometriske konstruktion af parabelbuen, idet du indfører en skydervariabel for parameteren som forklaret ovenfor.

Vi kan endda gennemføre udregningen af parameterfremstillingen rent symbolsk ved at oprette et noteværksted (i en ny opgave!). Vi finder da

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &:= (1-t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \rightarrow (b-a) \cdot t + a \\ \mathbf{q} &:= (1-t) \cdot \mathbf{b} + t \cdot \mathbf{c} \rightarrow (c-b) \cdot t + b \\ \mathbf{r} &:= (1-t) \cdot \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{q} \rightarrow (a-2 \cdot b+c) \cdot t^2 + (2 \cdot b-2 \cdot a) \cdot t + a \end{aligned}$$



Delepunktet R er altså givet ved et andengradspolynomium i t . Konstantleddet A angiver begyndelsespunktet, det lineære led med koefficienten $2B - 2A = 2 \cdot (B - A) = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ angiver begyndelseshastigheden, dvs. tangentvektoren i A , der altså peger i retning mod B . Endelig er der det kvadratiske led med koefficienten $A - 2B + C = 2 \cdot \left(\frac{A+C}{2} - B \right) = 2 \cdot (M - B) = 2 \cdot \overrightarrow{BM}$. Det svarer netop til den halve acceleration, der altså er rettet langs medianen fra B . Accelerationen er derfor rettet langs parablens akse. Denne symbolske repræsentation gør det altså nemt at se hvordan parablen starter, men det er sværere at se hvad der sker undervejs, og hvor den slutter. Vi kan imidlertid regne videre!

Øvelse 1.22:

- Bestem positionen til tiden $t = \frac{1}{2}$ og $t = 1$, dvs. udregn $\mathbf{r}|_{t=1/2}$ og $\mathbf{r}|_{t=1}$.
- Udregn også midtpunktet på medianen, dvs. midtpunktet mellem M og B . Konklusion?
- Differentier stedvektoren $\mathbf{r}$ som funktion af tiden og find derved et udtryk for hastighedsvektoren $\mathbf{v}$. Udregn specielt hastighedsvektoren til tiden $t = \frac{1}{2}$ og $t = 1$. Konklusion?
- Differentier hastighedsvektoren $\mathbf{v}$ som funktion af tiden og find derved et udtryk for hastighedsvektoren.

Med støtte i parameterfremstillingen kan vi nu give et nyt bevis for at parameterkurven netop må være en parabel:

Sætning 7: Parameterkurven for et andengradspolynomium i t er enten en parabel eller en halvlinje.

Hvis et punkt P gennemløber parameterkurven $\mathbf{a} \cdot t^2 + \mathbf{b} \cdot t + \mathbf{c}$, hvor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, så er parameterkurven

- enten en parabel, der går gennem begyndelsespunktet med stedvektoren $\mathbf{c}$, med begyndelseshastigheden $\mathbf{b}$ og accelerationsvektoren $2\mathbf{a}$, der netop er parallel med parablens akse
- eller en halvlinje, med retningsvektor $\mathbf{a}$, hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle.

Bevis:

Vi skifter til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen, hvor vi vælger koordinatsystemet snedigt. Da vektoren $\vec{a}$ er en egentlig vektor kan vi vælge y -aksen, så den ligger parallel med vektoren $\vec{a}$. I dette koordinatsystem har vektoren $\vec{a}$ derfor koordinaterne $\{0, a\}$, hvor a er positiv og angiver længden af vektoren $\vec{a}$. Men så er vi næsten færdige, idet vi nu ved at banekurven har parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \cdot t + c_x \\ a \cdot t^2 + b_y \cdot t + c_y \end{bmatrix}$$

Derefter forskyder vi koordinatsystemet, så Origo falder i punktet med stedvektoren $\vec{c}$, dvs. c -vektoren får koordinaterne $c_x = 0, c_y = 0$. Dermed forenkles parameterfremstillingen yderligere til

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \cdot t \\ a \cdot t^2 + b_y \cdot t \end{bmatrix}$$

Hvis $b_x \neq 0$, dvs. vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært uafhængige (dvs. de er *ikke* parallelle), kan vi eliminere parameteren t og finde ligningen for banekurven i x - y -planen. Vi finder da

$$t = \frac{x}{b_x}, y = \frac{a}{b_x^2} \cdot x^2 + \frac{b_y}{b_x} \cdot x$$

Men det er netop ligningen for en parabel med y -aksen som akseretning.

Hvis derimod $b_x = 0$, dvs. vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært afhængige (dvs. de er netop parallelle) forenkles parameterfremstillingen til

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t \end{bmatrix}$$

Men det viser netop at banekurven ligger på y -aksen. Da andengradspolynomiet er nedadtil begrænset af toppunktet for andengradspolynomiet, bliver banekurven denne gang en halvlinje. ☺

1.4 Gaudis buer

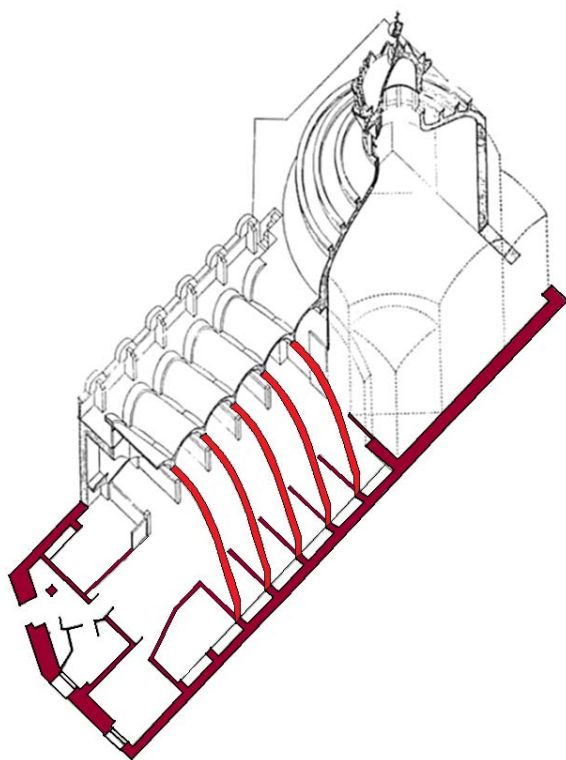
Gaudis interesse for parabelformede buer som dekorative elementer ses allerede i hans ungdomsværk, hvor han byggede en ny staldbygning med tilhørende porthuse for familien Güell, det såkaldte Finca Güell:



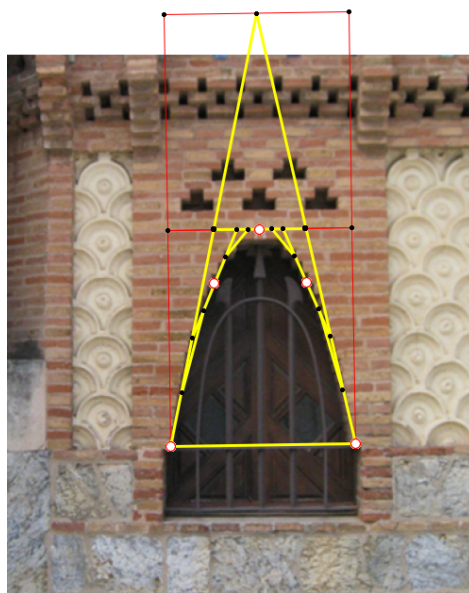
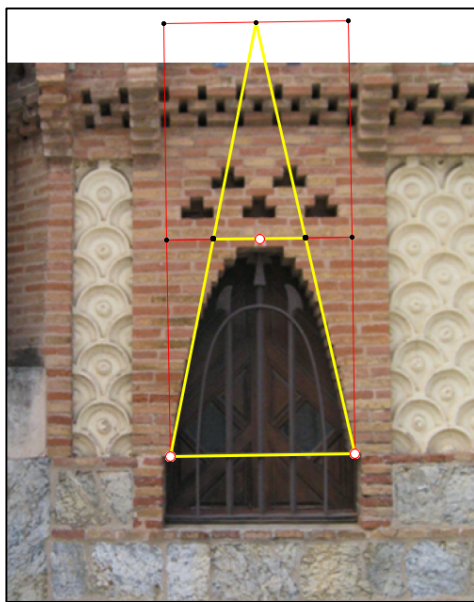
Allerede ved indgangen til venstre (i portåbningen) og til højre for den berømte drageport (i ladebygningen) ses parabelformede åbninger. Drageporten afslører i øvrigt at Gaudi også var velbevandret i udformning af smedjærn!



Hvis man er så heldig at man kan få lov til at komme ind i staldene vil man også kunne se de karakteristiske parabelformede loftshvælvinger:



Her vil vi analysere vinduesåbningen i lyset af det vi nu ved om parabelbuer.



Vi indkranser da vinduet i et rødt rektangel, som fordobles. Herefter tegnes den gule trekant med den dobbelte højde. Hvis der er tale om en parabelbue skal trekantens sider være tangenter til parabelbuen. Tilsvarende skal midtpunktstransversalen tangere for oven. Det ser ikke helt tosset ud! Denne simple konstruktion kan suppleres med flere trekanter, hvor vi nøjes med at tegne midtpunktstransversalerne. I praksis kan konstruktionen nu opbygges som et træstillads, der kan vejlede mureren i sit arbejde, selv om jeg ikke ved om Gaudi har benyttet sig af sådanne 'trekantstilladser', hvor kun den nederste halvdel er nødvendig i konstruktionen.

Dekorativt er der mange fordele ved at bruge parabellignende buer, fordi man derved undgår for mange rette linjer i konstruktionen, hvilket passer godt ind i Gaudis organiske stil. Der er da også mange eksempler på parabelkonstruktioner i Gaudis arkitektur, som tydeligvis tjener et dekorativt formål. Gaudi tog sine erfaringer fra staldbygningerne i Finca Güell med sig i de næste to bygninger: Palau Güell, privathuset for sin mæcen, og Teresianer kollegiet. Starter vi med at kigge på Palau Güell, der er optaget på Unescos verdensarvs-liste sammen med flere andre af Gaudis mesterværker, ses de parabellignende buer allerede ude fra gaden, i form af de store fløjddøre beregnet på hestevogne, der kørte ind ad den ene og ud af den anden.



En hurtig geometrisk analyse af et billede af en af fløjddøre afsløre med det samme, at der ikke kan være tale om en parabelbue. De tre gule linjer skulle alle være tangenter og det er de skrå linjer tydeligvis ikke! Ved at benytte fempunktskeglesnittet, kan vi også hurtigt se, at der ikke kan være tale om en forvrængning, fordi kameraet måske stod skævt, så parablen forvrænges til en hyperbel eller i dette tilfælde en ellipse:



Det er altså *ikke* en parabel, der figurer i portåbningen ud mod gaden. Det gør det nærtliggende at undersøge om der i stedet er tale om en kædelinje. Da vi ikke råder over en simpel geometrisk konstruktion af kædelinjen smider vi denne gang billedet ind i et koordinatsystem:



$$\text{kædelinje: } y = a \cdot \left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)$$

$$\triangleright y = \frac{a \cdot e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 \cdot e^{\frac{x}{a}} + 1 \right)}{2}$$

sol::=solve(**kædelinje**,a)|x=8.82 and y=-20.6

$\triangleright a = -3.30813$ ⚠

f(x):=right(**kædelinje**)|sol $\triangleright$ Udført

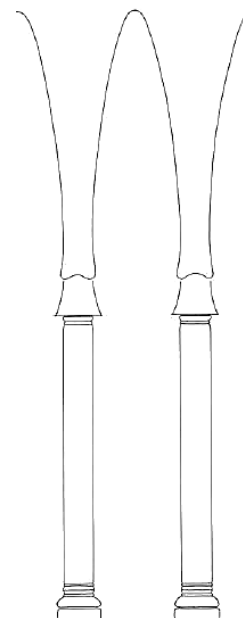
f(x) $\triangleright -1.65406 \cdot (0.739127)^x \cdot ((1.83047)^x - 2 \cdot (1.35295)^x + 1)$

Kædelinjen er heller ikke overbevisende! Portåbningen er simpelthen for flad for oven i forhold til dens højde!

Palace Güell har været under ombygning i flere år og derfor lukket for publikum, men er for nylig igen åbnet for offentligheden efter en gennemgribende restaurering.

Øvelse 1.23

- For at finde mere overbevisende parabellignende figurer i Palau Güell må du gå på internettet, hvor det vrir med billeder fra det indre. Find nogle passende hvælvinger/vinduer fra det indre af Palau Güell og undersøg om de passer med parabler eller eventuelt med kædelinjer.
- Til højre ser du en stregtegning af en typisk hvælving fra det indre. Undersøg om den øverste del af buen passer med en parabel.



Det mest spektakulære dekorative element i Palace Güell er uden diskussion den flotte parabelhvælving i Palace Güell. Huset bygget op omkring et indre rum, der som en erstatning for den traditionelle vinduesskakt føres op igennem hele bygningen og ender i en kuppel, med et stjernehvælv, hvor lyset slipper ind gennem små huller i hvælvet, der illuderer stjerner. Men hvælvingen er altså udformet som en omdrejningsparaboloide, dvs. en parabel, der er drejet omkring sin akse, noget vi nu vil undersøge nærmere. Vi bruger da en speciel facilitet i 3d-graf-værkstedet til at forenkle undersøgelsen. I den næste del af hæftet vil vi gå dybere ind i parameterfremstillinger, men her bruger vi kun funktioner i to variable.

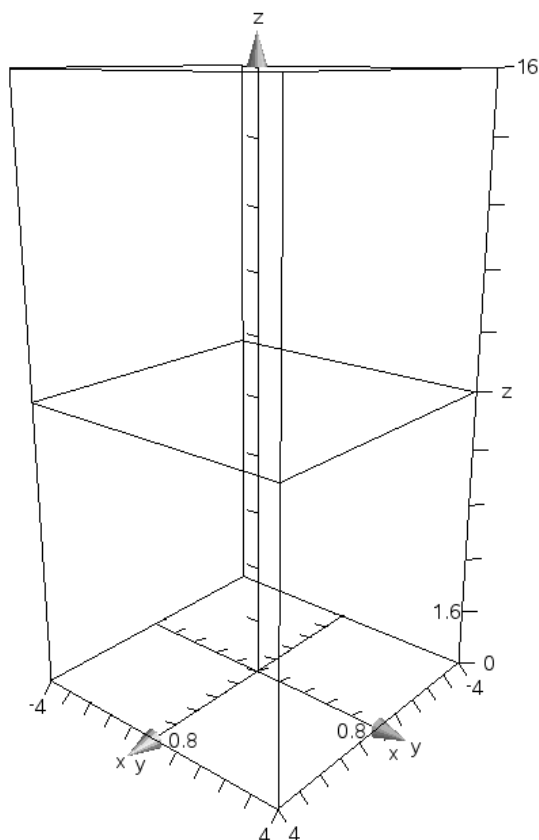
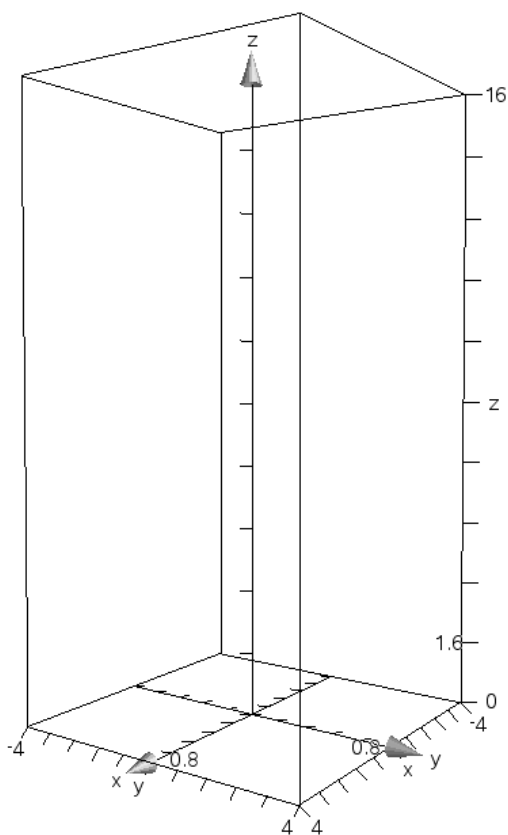
Udgangspunktet er den følgende simple observation:

Sætning 8: Omdrejningslegeme

Hvis vi drejer grafen for en funktion $z = f(x)$ omkring z -aksen er den tilsvarende funktion i to variable givet ved forskriften $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Vi udfører altså substitutionen $x \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ eller endnu simplere $x^2 \rightarrow x^2 + y^2$.

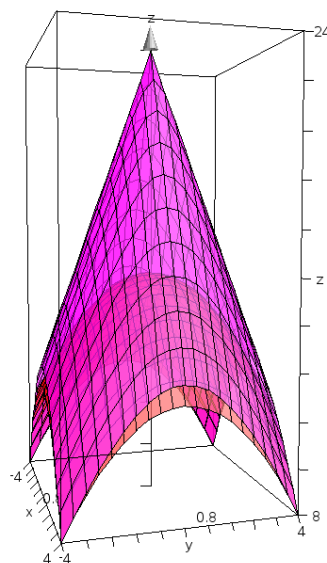
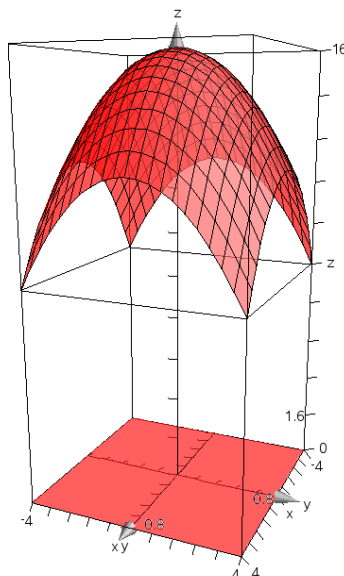
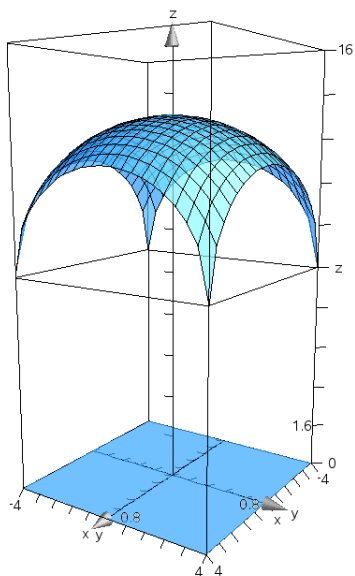
Bevis: Højden af grafen, dvs. z -værdien, er nemlig givet ved $f(r)$, hvor r er afstanden indtil omdrejningsaksen, dvs. afstanden ind til z -aksen eller $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ☺.

I Palau Güell kan det inderste rum modelleres som en terning med sidelængde 8 m med en kuppel ovenpå. Vi konstruerer derfor modellen indenfor det følgende udsnit: $-4 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 16$



Vi kan fremhæve den nederste del af rummet, terningen, ved at tilføje planen $z=8$, og skifte attributter til kun at vise gitteret og kun at bruge 2 inddelinger for x -, og y -koordinaten.

Vi tilføjer så i første omgang en halvkugle som kuppel.



Øvelse 1.24:

- Gør rede for at halvkuglen må have radius $4\sqrt{2}$.
- Gør rede for at halvcirklen i x - z -planen må have ligningen $x^2 + (z-8)^2 = 32$, hvorfor halvkuglen må have ligningen $x^2 + y^2 + (z-8)^2 = 32$.

- c) Gør rede for at den øvre halvkugle må have ligningen $z = 8 + \sqrt{32 - x^2 - y^2}$ og tegn grafen. Gør rede for at den skærer væggene i halvcirkler og bestem deres centrum og radius.

Derefter kigger vi nærmere på Gaudis paraboloidekuppel. I modsætning til den halvkugleformede kuppel udfylder Gaudis paraboloidekuppel hele den øverste terning, dvs. toppunktet ligger 16 meter over gulvet.

Øvelse 1.25:

- a) Gør rede for at parabeln i x-z-planen må have en ligning på formen $z = 16 - k \cdot x^2$ og at omdrejningsparaboloiden derfor må have en ligning på formen $z = 16 - k \cdot (x^2 + y^2)$. Bestem den værdi af k , der sikrer at paraboloiden når helt ud til hjørnerne af terningen.
- b) Tegn grafen for det pågældende andengradspolynomium. Gør rede for at paraboloiden skærer væggene i parabler og bestem toppunktets højde over terningen i bunden.

Ligesom en parabel i planen er indesluttet i en trekant er omdrejningsparaboloiden indesluttet i en kegle, der fremkommer ved at dreje trekanten omkring z-aksen.

Øvelse 1.26:

- a) Vi skifter nu vinduet, så z-koordinaten løber fra 8 til 24, hvorved den nederste terning forsvinder ud af billedet. Til gengæld dukker der en ny terning op oven på paraboloiden.
- b) Gør rede for at keglens bundradius må være $\sqrt{32}$, og at den skrå frembringer i x-z-planen derfor må have en ligning på formen: $z = 24 - 2\sqrt{2} \cdot x$.
- c) Gør rede for at keglen derfor må have ligningen $z = 24 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ og tegn grafen.
- d) Hvad bliver ligningen for den kurve, som keglen skærer væggen i? Prøv om du kan argumentere for at der er tale om en hyperbel.

I Teresianernes kollegium, som var Gaudis næste store bygningsværk, har han tilsvarende inkorporeret parabelformede buer:



Indgangsdøren med den karakteristiske smedejernslåge er typisk Gaudí:





Men som det ses vrir det med parabelformede buer i kollegiets gange ☺

Øvelse 1.27:

- a) Undersøg nu selv for udvalgte billeder i hvilket omfang de parabelformede buer i Teresianerkollegiet vitterligt er paraboler eller kædelinjer eller ...

Gaudis brug af kædelinjer stammer fra ønsket om strukturel stabilitet. Gaudi var optaget af hvordan man bedst muligt understøtter en bygning, herunder, hvordan man kan lave en portbue, som understøtter sig selv, dvs. hvor man undgår sidelæns (transversale) kræfter langs porten, hvorved man også undgår at skulle afbalancere den, noget man typisk er nødt til ved rundbuekonstruktioner. (I større format, når vi nærmer os katedralbyggeriet er det også vigtigt for Gaudi at undgå den slags sidelæns tryk, som traditionelt bliver afbalanceret af stræbepiller og stræbebuer, noget som Gaudi betragter som resultatet af en uhensigtsmæssig konstruktion, som om man havde givet bygningen 'krykker', fordi den ikke kan stå selv.)

Men tilbage til buerne, hvor vi altså skal undgå de tværgående kræfter. Spændingerne skal løbe langs buen. Løsningen på dette mekaniske problem blev fundet af Hooke i 1675. Hooke samarbejdede med Christopher Wren om bl.a. bygningen af Sct. Pauls Cathedral i London, der blev konstrueret efter de nye principper. Hooke skjulte sin løsning i et anagram:

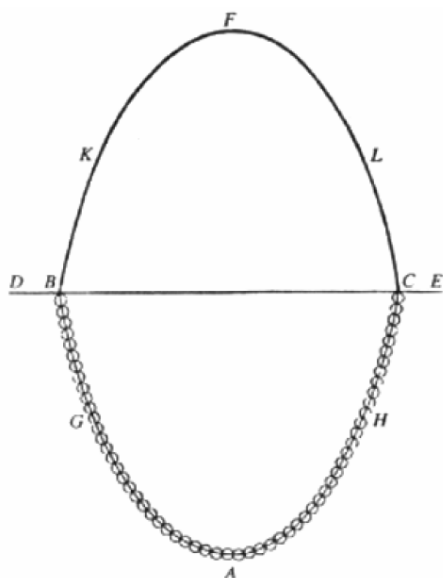
abcccddeeeefggjiiiiiii-ilmnnnnnnnooprssstttttuuuuuuuux

Bogstaverne kan omarrangeres til at give løsningen

Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum

Oversat til dansk betyder det noget i retning af:

På samme måde som en bøjelig kæde hænger, sådan vil den vendt på hovedet stå som en stiv bue



Her ses princippet illustreret i 1748 af arkitekten Poleni i 1748. Tricket består altså i at vende kædeformen på hovedet og bruge den som udgangspunkt for opbygningen af buen, der da kun vil være underkastet længdegående kræfter og dermed vil være selvunderstøttende. Den pågældende kurveform kaldes ikke overraskende for en *kædelinje* (på engelsk en *Catenary*). Det er som vist nemt at bygge en sådan Gaudibue op med passende udformede brikker, som vist på det næste billede af en demonstrationsmodel, der har været en tur i scanneren!

Forudsætningen for at en selvunderstøttende bue følger en kædelinje er dog, at massen er jævnt fordelt langs buen. Hvis denne forudsætning ikke er opfyldt, deformeres kædelinjen og buen følger en mere kompliceret. Men dens form kan stadigvæk findes eksperimentelt ved at hænge buen og vende den på hovedet. I praksis bestemmer Gaudi altså formen for sine buer ud fra den belastning, de skal bære, og den behøver ikke være fordelt jævnt efter enten buen (den klassiske kædelinje) eller den vandrette retning (parablen). Så i praksis kan Gaudi godt komme til at arbejde med blandingsformer mellem den hyperbolske kædelinje og den paraboliske hængebro!

Især ved de komplicerede kirkebyggerier: Kirken i Colonia Güell, der aldrig blev færdigbygget, og i katedralen Sagrada Familia, udnytter Gaudi sådanne konstruktioner som en form for analog computer, til at finde den stabile form, som kirken må have for at kunne understøtte sig selv. På museet i loftsetagen er modellen, hvor kirken altså hænger på hovedet, ophængt over et spejl, så man kan se den omvendte form i spejlet, hvor kirken nu står oprejst!

Ved mere komplicerede modeller kunne Gaudi ydermere hænge sandsække op i modellen svarende til de varierende belastninger, som vist på det følgende billede af den uafsluttede kirke i Colonia Güell. Det følgende I dag ville man benytte et computerprogram til at beregne belastningen, men på Gaudis tid var det jo ingen mulighed.

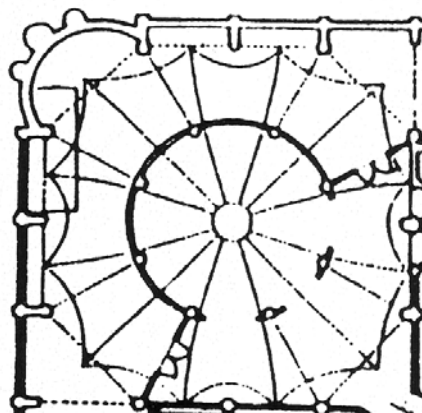


De konkrete modeller var komplicerede og krævede et stort og grundigt forarbejde, da man ikke så nemt kan ændre på dem bagefter. I computermodeller kan man der i mod nemt variere forskellige typiske parametre og lave eksperimenter med hvordan belastningen ændres, hvis formen på bygningen ændres. Da mange af Gaudis modeller for Sagrada Familia blev ødelagt under den spanske borgerkrig har det været helt uomgængeligt med brugen af moderne computermodeller for at rekonstruere Gaudis bygningsprincipper i hans ufuldendte katedral. Der ud over stilles der i dag større krav til modstandsdygtighed overfor ekstreme vejrforhold og lignende, så Gaudis rammer for bygningen af katedralen har måttet forbedres løbende!



Vi slutter med at se på yderligere nogle anvendelser af parabelbuer: Først forsøger vi os med en rekonstruktion af grundplanen for sakristiet til Familia Sagrada. Derefter kigger vi nærmere på opbygningen af søjlerne i Sagrada Familia, hvor Gaudi bruger en kompliceret søjleform, hvis profil er opbygget af parabelbuer.

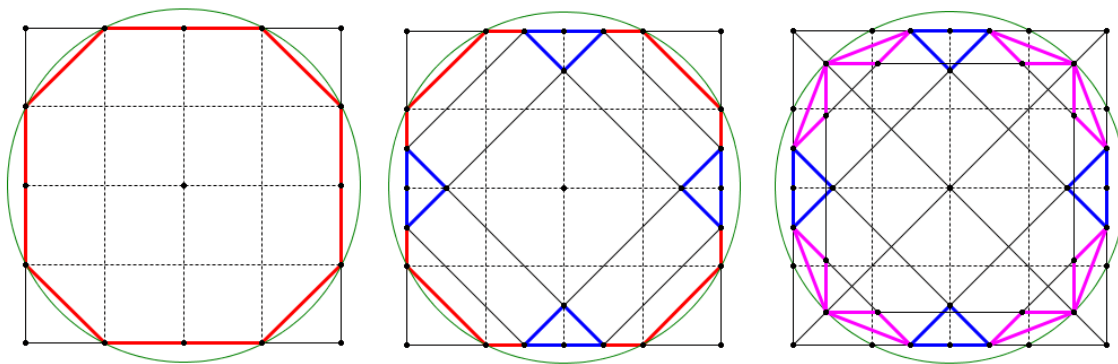
Først sakristiet, hvor vi kaster et blik på en moderne model af kuplen (Gaudis egen model fra fotografiet er gået tabt), som er frembragt af 12 sideflader (som vi vender tilbage til i næste afsnit). Grundplanen er en oktagon indfældet i et kvadratisk net:



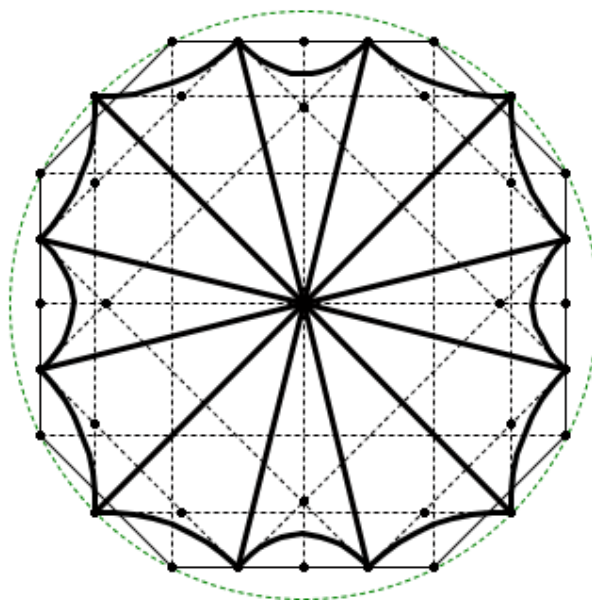
Det er en klassisk måde at opbygge et ottekantet rum i en kirke (konstruktion ad quadratum, dvs. ud fra et net af kvadrater). Men det nye er parabelbuerne, der afgrænser rummet, hvoraf der er 12. Det er konstruktionen af disse buer, vi nu vil give et bud på. Gaudi selv har ikke efterladt en eksakt konstruktionsbeskrivelse, så vi kan ikke vide om han har tænkt præcist sådan, men det ligger givetvis tæt på hans tankegang ☺.

Øvelse 1.28: Grundplanen for sakristiet i Sagrada Familia

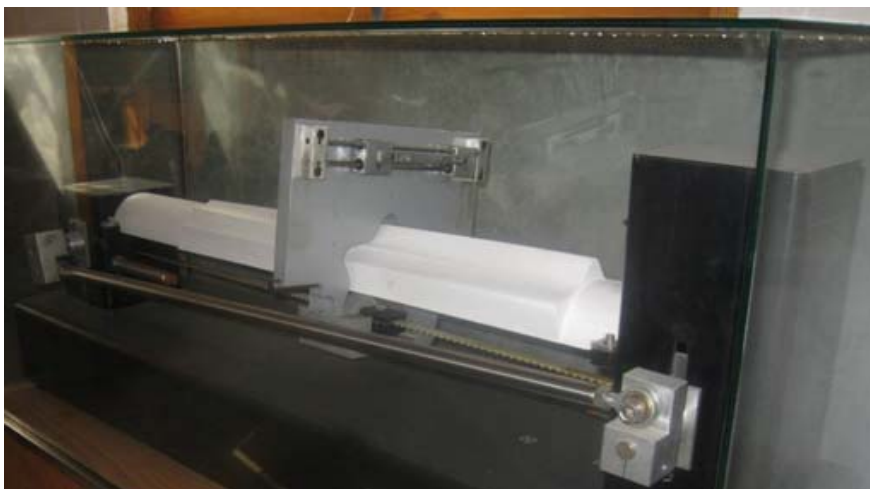




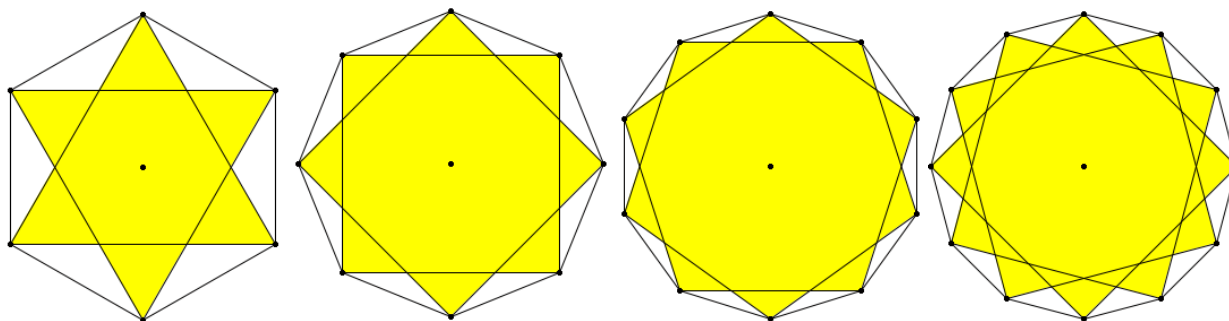
- Tegn et stort kvadrat og inddel det i 16 underkvadrater som vist. Opbyg ottekanten ved at kombinere to sider i de små kvadrater med en diagonal hele vejen rundt. Ottekanten består altså reelt af 12 stykker: otte kvadratsider og fire kvadratdiagonaler. Ottekanten er ikke regulær, men den er stadigvæk symmetrisk og har en omskrevet cirkel.
- Tilføj midtpunkterne for de vandrette og lodrette sider i 12 sider. Tilføj også forbindelseslinjerne for disse midtpunkter som vist. Du kan nu afgrænse de fire blå trekanter, der udspænder fire af parabelbuerne. Du har nu styr på de otte af parabelbuerne hjørner.
- Tilføj nu diagonalerne i det store kvadrat. De skærer den omskrevne cirkel i de resterende fire hjørnepunkter for parabelbuerne. De fire hjørner udspænder et kvadrat. Ved at følge forbindelseslinjerne mellem hjørnerne i 12-kanten kan vi nu tilføje yderligere 8 pink trekanter, der udspænder de resterende otte parabelbuer.
- Tilføj nu en blå parabelbue og en pink parabelbue ud fra standardkonstruktionen som et geometrisk sted udspændt af trekanten, dvs. med trekantens to sider som tangenter. Overfør ved hjælp af spejlinger disse to parabelbuer til de resterende trekanter. Du kan ikke direkte spejle et geometrisk sted, men hvis det geometriske sted for det afhængige kurvepunkt Q drives af det uafhængige punkt P kan du spejle kurvepunktet Q , og derefter frembringe det geometriske sted for spejlpunktet Q' drevet af det samme uafhængige punkt P . Du skulle derved gerne få frembragt en grundplan for sakristiet, der minder om den viste ☺.



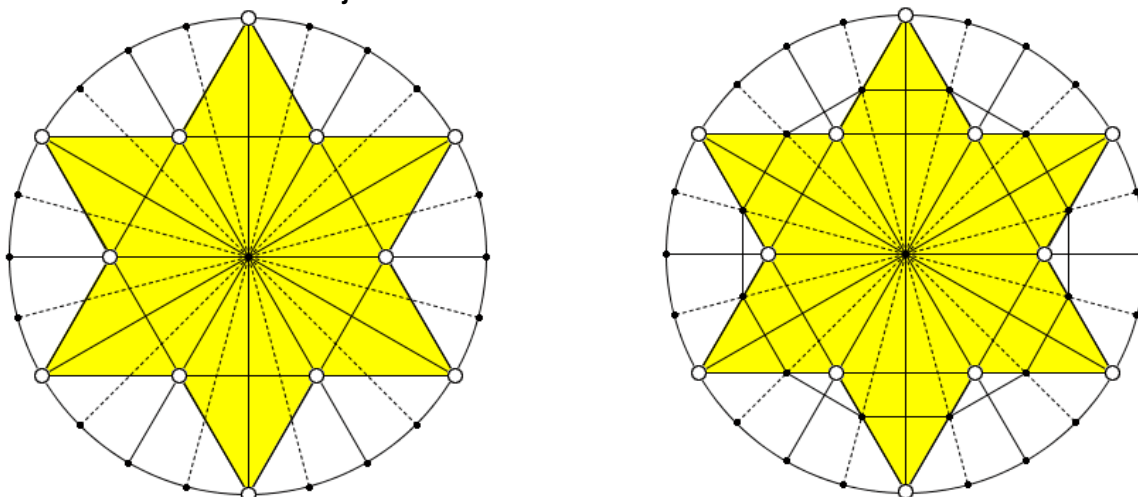
Vi vender os derefter mod søjlerne. Som man kan se af modellen drejes søjleprofilen, når man bevæger sig op langs søjlen. Søjleprofilerne i Sagrada Familia følger komplicerede og fascinerende mønstre. De kan frembringes ved hjælp af maskiner, der roterer mønstret, mens granitten skæres til:



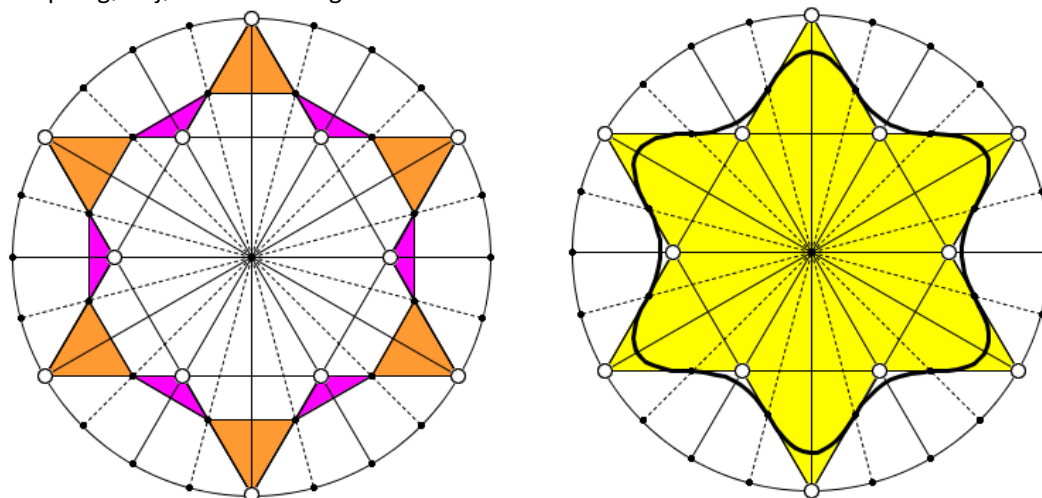
De buede polygoner er netop frembragt ved hjælp af parabelbuer. Vi ser først på det statiske mønster i bunden af søjlen. Udgangspunktet er en regulær stjernepolygon med et lige antal sider, der derfor kan tænkes opbygget af mindre regulære polygoner: En regulær sekstakket stjerne af to ligesidede trekanter, en regulær ottetakket stjerne af to kvadrater, en regulær titakket stjerne af to regulære femkanter og en regulær tolvtakket stjerne af tre kvadrater:



Øvelse 1.29: Den sekskantede stjerne



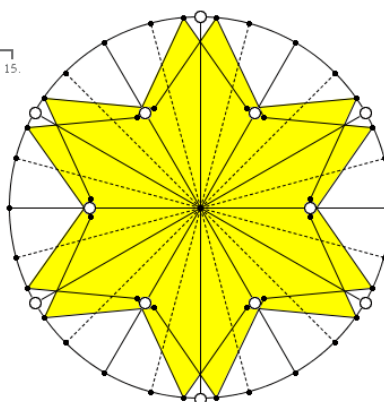
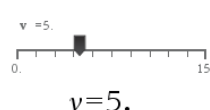
- a) Den sekstakkede stjerne består af 12 hjørner. For at få parabelbuerne til at slynge sig rundt om stjernepolygonen starter vi med at fordoble antallet af radiallynjer til 24 langs den omskrevne cirkel. Gør rede for at de ekstra radiallynjer skærer takkerne i den sekskantede stjerne i 12 punkter, der netop udgør hjørnerne i en regulær tolvkant.



- b) Siderne i den regulære tolvkant afskærer da sammen med takkerne i den sekskantede stjerne et mønster af trekanter, der snor sig rundt om den sekskantede stjerne. Ved at udfylde disse trekanter med parabelbuer frembringer vi netop den bløde stjernefigur, som Gaudi brugte som profil for de sekskantede søjler. Tilføj nu selv en parabelbue i en orange trekant, såvel som en parabelbue i en pink parabelbue ud fra standardkonstruktionen som et geometrisk sted udspændt af trekanten, dvs. med trekantens to sider som tangenter. Overfør ved hjælp af spejlinger disse to parabelbuer til de resterende trekanter. Du kan ikke direkte spejle et geometrisk sted, men hvis det geometriske sted for det afhængige kurvepunkt Q drives af det uafhængige punkt P kan du spejle kurvepunktet Q , og derefter frembringe det geometriske sted for spejlpunktet Q' drevet af det samme uafhængige punkt P .
- c) Gentag den samme konstruktion for den ottetakkede stjernepolygon ☺

For nu at få vredet mønstret op langs søjlen skal man forestille sig at man drejer den grundlæggende profil til begge sider på én gang. De seks takker fordobles derved og efter at have drejet 15° til begge sider er der igen symmetri, men nu er antallet af takker fordoblet.

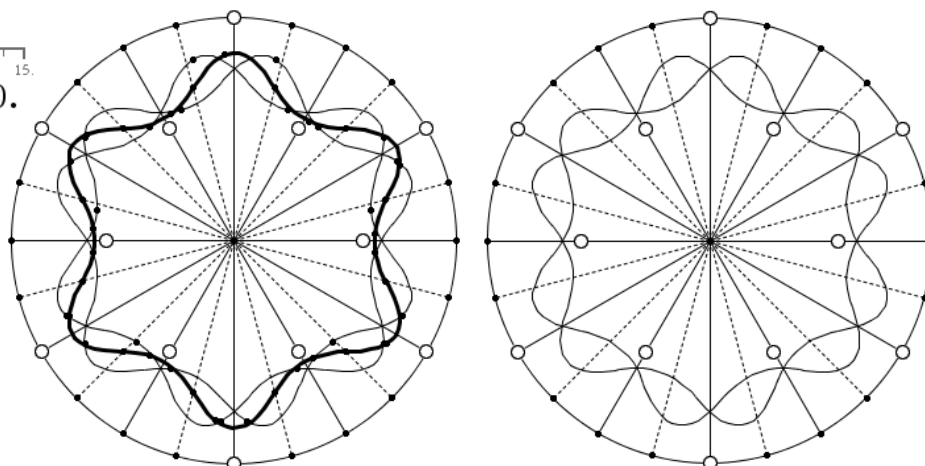
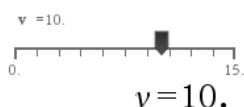
Øvelse 1.31:



- a) Vi starter med at se på hvad der sker når man drejer den sekskantede stjerne. Genbrug figuren fra den foregående øvelse! Opret som vist en skyder med drejningsvinklen v . Opret også en tekstboks med teksten v , som efterfølgende beregnes, så den får samme værdi som drejningsvinklen.

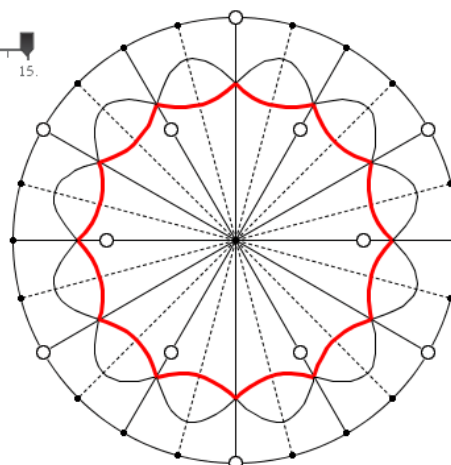
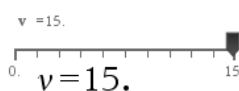
- b) Du kan nu dels dreje stjernen, dels spejle den drejede stjerne i en lodret akse, svarende til at du drejer den modsatte vej. Skjul den oprindelige stjerne. Træk herefter i skyderen, så du kan se den sekstakkede stjerne omdanne sig til en tolvtakket stjerne.

Øvelse 1.32:



- a) Du er nu klar til egentlige udfordring, hvor det er parabelslangen, vi skal dreje begge veje. Opret som vist en skyder med drejningsvinklen v . Opret også en tekstboks med teksten v , som efterfølgende beregnes, så den får samme værdi som drejningsvinklen. Genbrug parabelslangen fra den tidligere øvelse 1.30. For at dreje slangen skal du opfatte den som sammensat af tolv små slangestykker, der hver for sig er konstrueret som en parabelbue via et geometrisk sted. Når du drejer et geometrisk sted kan du imidlertid ikke dreje det som en samlet figur, men du får i stedet tilbudt at dreje et punkt på det geometriske sted. Accepter tilbuddet ☺. Dette punkt driver derefter det drejede punkt som et nyt geometrisk sted, hvorved du endelig får drejet hele slangestykket. På samme måde går du frem ved spejlingen i den lodrette akse. Til slut skjules den oprindelige slange.
- b) Du kan nu ved at trække i skyderen se hvordan de to slanger overlapper hinanden indtil du til sidst får skilt dem maksimalt ad.

Husk at det kun er fællesmængden, der dukker op på søjlen, idet maskinen jo skære alt væk, der ligger udenfor de to slangeprofiler. Når vi når op på drejningsvinklen 15° har vi altså endeligt frembragt den nye profil med 12 takker. Vi kan så give den nye profil endnu en tur i vridemaskinen, hvorved den omdannes til en 24 takket stjernefigur osv. indtil søjleprofilerne smelter sammen med en cirkel.

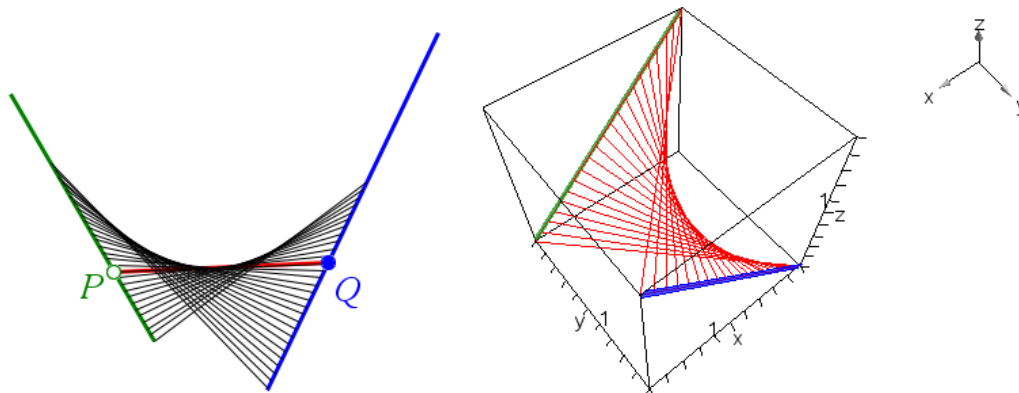


Søjlerne er selvsagt ret så fascinerende og ender i øvrigt med at spalte ud i flere grene. Gaudi tilstræbte bevidst, at søjlerne skulle opføre sig som træstammer, og at hele kirkerummet, derved kommer til at minde om en lysning i en skov med store træstammer der bærer hvælvet.



Anden del: Flader med fokus på keglesnitsflader

Gaudi var en uhyre original visionær arkitekt, der på den ene side var drevet af en dyb intuitiv forståelse for matematikkens geometriske former, og ikke mindst samspillet med naturens former. På den anden side havde han en dyb sans for religiøs symbolik og ønskede ikke mindst i sine hovedværker, kirken i Colonial Güell, der aldrig blev gjort færdig, og i særdeleshed i katedralen Sagrada Familia, at lave en syntese af billedsproget og kirkens opbygning. I Sagrada Familia afspejler hele kirkens struktur og udsmykning historien om den hellige familie. Heri indgik også en særlig forkærlighed for at se selv matematikkens former, som udtryk for religiøs symbolik. Det mest karakteristiske eksempel er hans brug af de *dobbeltretlinjede flader*. Vi har allerede set eksempler i plangeometrien på hvordan en ret linje, der glider langs to andre rette linjer, frembringer en indhylningskurve, som netop er en parabelbue:



På figuren lader vi altså punktet P glide jævnt langs den grønne linje og tilsvarende punktet Q glide jævnt langs den blå linje. Den røde linje, forbindelsesstykket PQ , glider da langs en parabel. Hidtil har vi fokuseret på skæringspunktet mellem den grønne og den blå linje og pakket hele konstruktionen ind i en trekant, men resultatet er det samme.

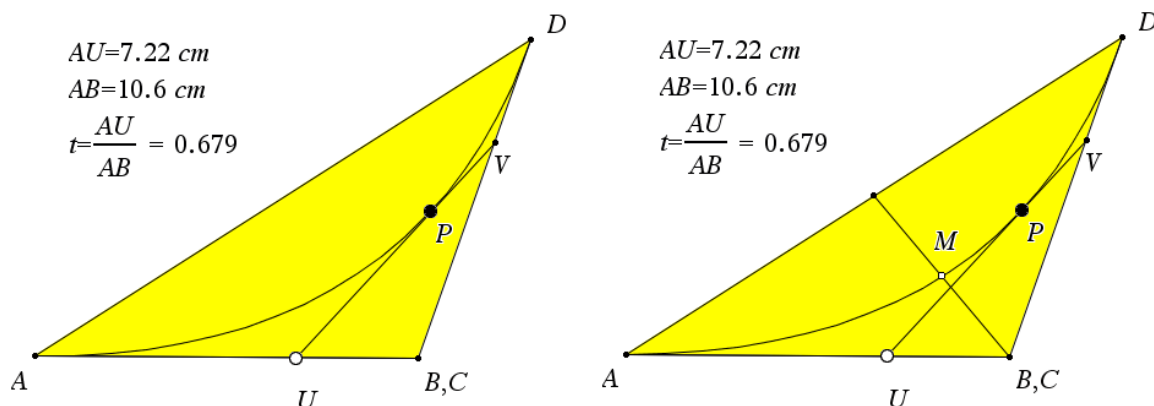
Gaudi var nu især fascineret af den tilsvarende konstruktion i rummet, hvor den grønne linje og den blå linje ikke længere behøver ligge i samme plan, de kan være indbyrdes vinkelrette. På figuren er de fx valgt så de ligger i hver sin af de to modstående sider i en terning. I så fald udspænder den røde forbindelseslinje en retlinjet flade med særligt kønne egenskaber, der gør den særdeles velegnet i arkitektoniske konstruktioner. Det hænger sammen med at det viser sig at fladen ikke bare er enkelt retlinjet, men *dobbelt retlinjet*. I stedet for at lade den røde linje glide hen over fladen kan man også lade den grønne linje glide hen over fladen indtil den når hen til den blå linje. Gaudi så denne flade som et symbol på *treenheden*: Fladen frembringes af faderen og sønnen, symboliseret ved den grønne og den blå linje, forbundet med helligånden, symboliseret ved den røde linje. Den tilhørende 'guddommelige flade' optræder derfor som en del af den religiøse signatur i hans kirkebygninger - hans religiøse logo.

Udover det ovenstående eksempel på en dobbelt retlinjet flade frembragt af to vinkelrette linjer, kan man udføre en tilsvarende konstruktion med udgangspunkt i to cirkler, der forbindes med en ret linje, der glider jævnt rundt på de to cirkler. Også denne flade er dobbelt retlinjet, og den indgår derfor på lige fod med den foregående i Gaudis kirkebyggerier. Men så er det også slut: Der findes kun disse to eksempler på 'guddommelige flader'. En dyb sætning i differentialgeometrien sikrer netop, at hvis en flade er dobbelt retlinjet er den enten af den første slags eller den anden slags. Der findes altså ikke andre 'guddommelige flader'. I resten af hæftet undersøger vi nu disse to 'guddommelige flader', der sammen med kuglen, keglen og cylinderen udgør de mest fundamentale byggelementer i arkitektur, og giver eksempler på hvordan Gaudi har brugt dem i sine to kirkebyggerier.

2. Den guddommelige flade I: Den hyperbolske paraboloid

2.1 Konstruktion af den guddommelige flade: Den hyperbolske paraboloid

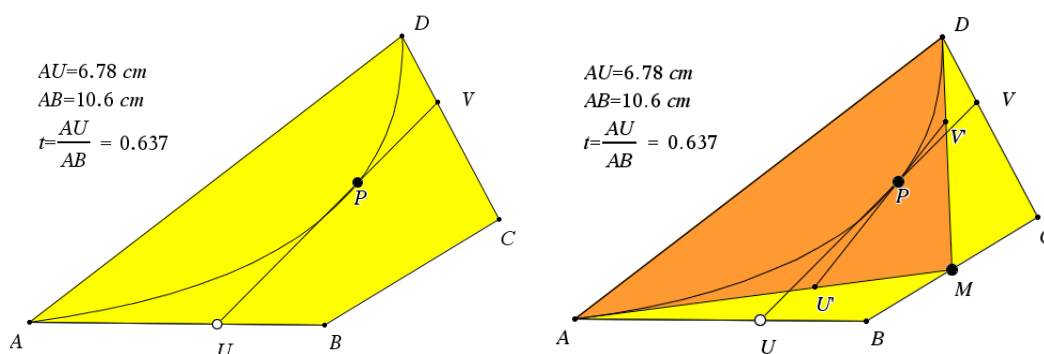
I det følgende er det vigtigt at kunne se lighederne mellem den todimensionale konstruktion af parablen og den tredimensionale konstruktion af paraboloiden. Så det kan være godt at læse afsnit 1.3 - Kunsten at se en parabel - om den todimensionale konstruktion først. Her sammenfattes den 2-dimensionale konstruktion i den følgende figur:



I 2 dimensioner ser vi på en trekant ABD (hvor punktet B også refereres til som C , idet man kan tænke på trekanten som en firkant, der er kollapsede, idet to af hjørnerne er smeltet sammen). Punktet U deler linjestykket AB i forholdet t . Punktet V deler linjestykket BD i det samme forhold t . Endelig deler punktet P linjestykket UV i det samme forhold t . Punktet P gennemløber da en parabel, der forbinder A med D idet siden AB tangerer parablen i A og siden BD tangerer parablen i D .

Øvelse 2.1

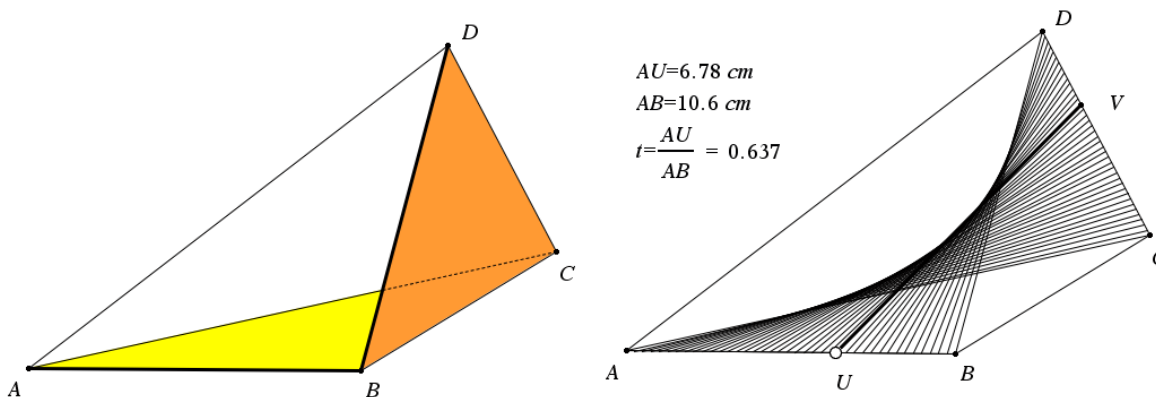
- Gør rede for at punktet deletpunktet U er givet ved $U = (1-t) \cdot A + t \cdot B$
- Gør rede for at deletpunktet P er givet ved $P = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot B + t^2 \cdot D$
- Gør rede for at parablen går gennem midtpunktet M for medianen fra B, C .



Vi løfter nu den ovenstående konstruktion til en firkant $ABCD$.

Øvelse 2.2

- Se på firkanten $ABCD$ og gennemfør den samme konstruktion, dvs. afsæt et deletpunkt U på siden AB og mål delingsforholdet t . Konstruer derefter de tilsvarende deletpunkter V på den modstående side CD og P på forbindelsesstykket UV . Konstruer endelig det geometriske sted for deletpunktet P drevet af deletpunktet U .
- Vis at der frembringes en parabel som forbinder A med D , men at parablen svarer til den ovenstående konstruktion i trekanten AMD , idet hjørnerne B og C erstattes af deres midtpunkt M .



Vi springer nu ud i rummet! Udgangspunktet er en plan trekant ABC . Vi tilføjer et fjerde hjørne D , som *ikke* ligger i planen udspændt af A , B og C . Firkanten $ABCD$ er da en *vindskæv firkant*, idet modstående linjer er indbyrdes vindskæve! Det samme gælder diagonalerne AD og BC .

Øvelse 2.3

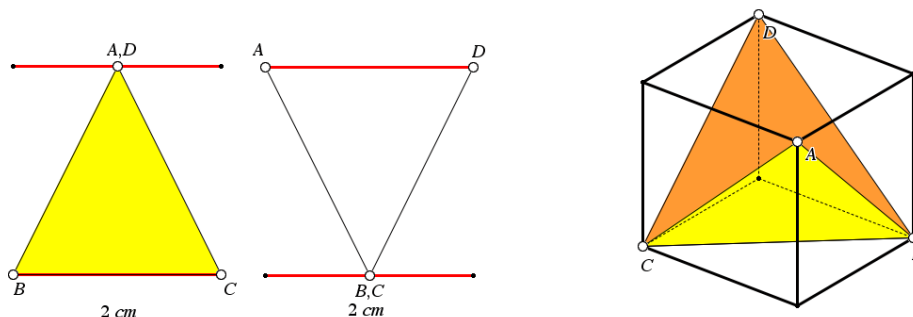
- Betragt midtpunkterne for firkantens sider. Gør rede for at midtpunkterne udspænder en *plan firkant*, dvs. der er *ikke* tale om en vindskæv midtpunktsfirkant.
- Hvad bliver længden af siderne i denne firkant. Hvad bliver retningen af siderne i denne firkant? Hvilken slags firkant er der tale om?

I denne vindskæve firkant (Som altså udgør to af siderne i tetraederet $ABCD$), vil vi nu konstruere en flade, der forbinder A med D og har trekanten ABC som tangentflade i startpunktet A og trekanten BCD som tangentflade i slutpunktet D . Fladen konstrueres som en *enkelt retlinjet flade*, men som vi skal se er den faktisk dobbeltretlinjet. Vi følger Gaudis konstruktion nøje idet vi først arbejder med en 2-dimensional parallelperspektivisk gengivelse af situationen, så vi får en første fornemmelse af situationen.

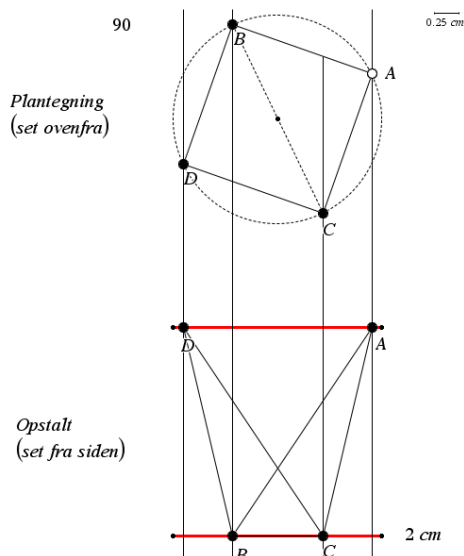
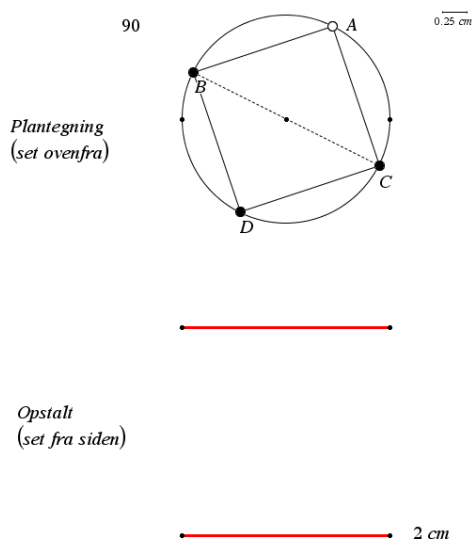
Øvelse 2.4

- Konstruer en firkant $ABCD$ som vist på figuren.
- Del siden AB ved hjælp af delepunktet U i forholdet t (husk at siden AB skal være oprettet som et linjestykke, ikke bare som en del af trekanten ABC). Del tilsvarende den modstående side CD i forholdet t og kald delepunktet V . Forbind de to delepunkter U og V med et linjestykke.
- Linjestykket UV frembringer da en flade, når delingsforholdet t gennemløber intervallet fra 0 til 1. Fladen tegnes som et geometrisk sted for linjestykket UV drevet af delepunktet U .

Silhuetten af denne flade er som vi har set en parabel. Fladen selv er en hyperbolsk paraboloid med kælenavnet en *hypar*. Hvis vi kigger ind på den vindskæve firkant $ABCD$ langs diagonalen AD falder de to punkter A og D sammen foroven og firkanten erstattes af to trekanter, der ligger oven i hinanden. Hvis vi tilsvarende kigger ind på den vindskæve firkant langs diagonalen BC falder de to punkter B og C sammen og firkanten erstattes igen af to trekanter, der ligger oven i hinanden. Vi kan nu i første omgang konstruere en 2d-animation hvor vi kigger vandret ind på figuren langs enten diagonalen AD eller diagonalen BC .

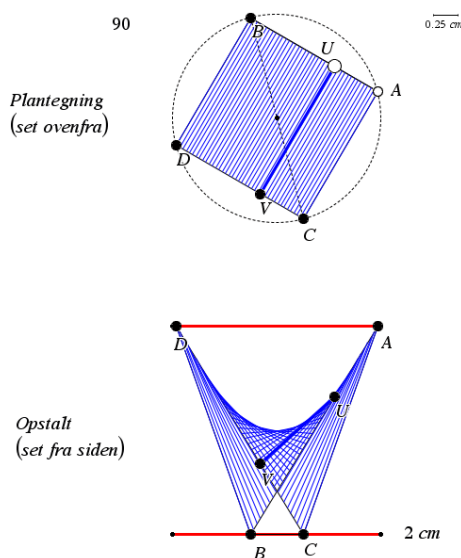
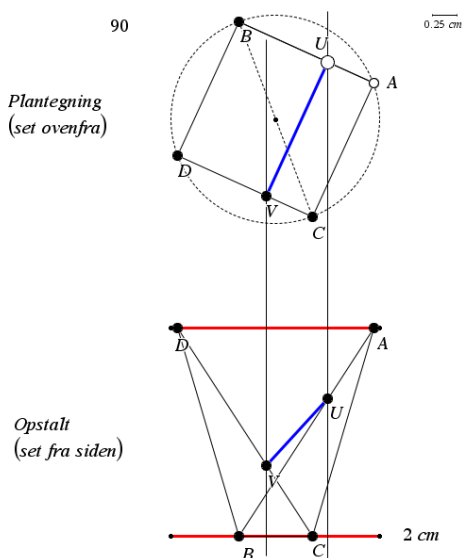


Vi vil nu konstruere en perspektivisk gengivelse af situationen ved hjælp af en plantegning set fra oven og en opstalt set fra siden. I traditionel deskriptiv geometri vil man kunne tegne to statiske opstalter, set fra venstre henholdsvis fra højre, men i et dynamisk geometriprogram kan vi frit dreje i det vandrette plan, så vi kan se opstalten fra alle sider. Vi vælger en særlig pæn vindskæv firkant indlejret i en terning, så den ligner et kvadrat set fra oven.



Øvelse 2.5

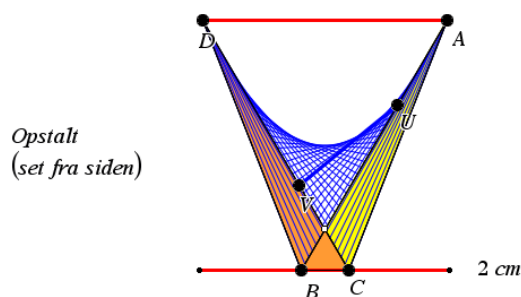
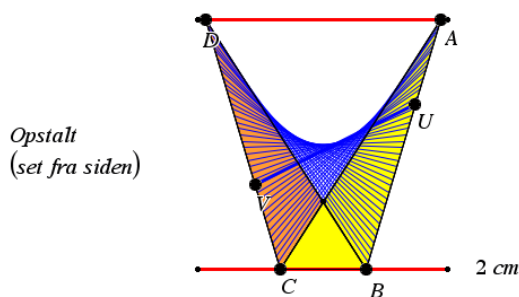
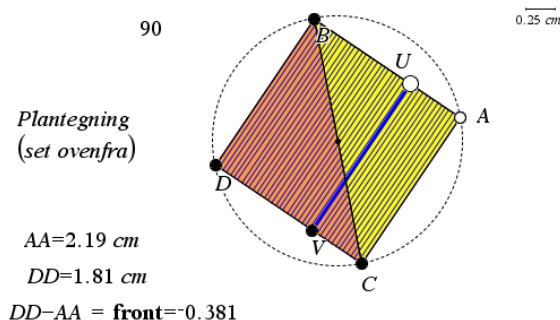
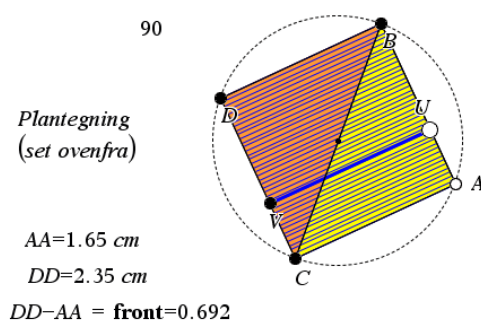
- Konstruer to vandrette linjestykker med længden 2 cm, så de ligger lodret over hinanden med den samme afstand 2 cm. De svarer til bund og top i terningen set fra siden. Konstruer tilsvarende en cirkel med diameter 2 cm, så cirklen ligger 2 cm lodret over linjestykkerne. I cirklen indskrives et kvadrat, idet du starter med et frit punkt A på cirklen og drejer det 90° tre gange for at få frembragt de tre andre hjørner B, C og D. Du har nu frembragt en plantegning set ovenfra, hvor du ved at trække i punktet A kan dreje kvadratet, som svarer til den vindskæve firkant ABCD set ovenfra.
- Overfør den vindskæve firkant ABCD til opstalten ved hjælp af vinkelrette linjer, idet A, D placeres i toppen og B, C placeres i bunden. Konstruer de to deltreen ABC og BCD i den vindskæve firkant. Kontroller at opstalt figuren følger med, når du trækker i det frie punkt A på cirklen.



- Vi skal nu have forbundet de modstående sider AB og CD i den vindskæve firkant. Vi starter øverst i plantegningen med at afsætte et frit punkt U på siden AB. Vær omhyggelig med at AB er oprettet

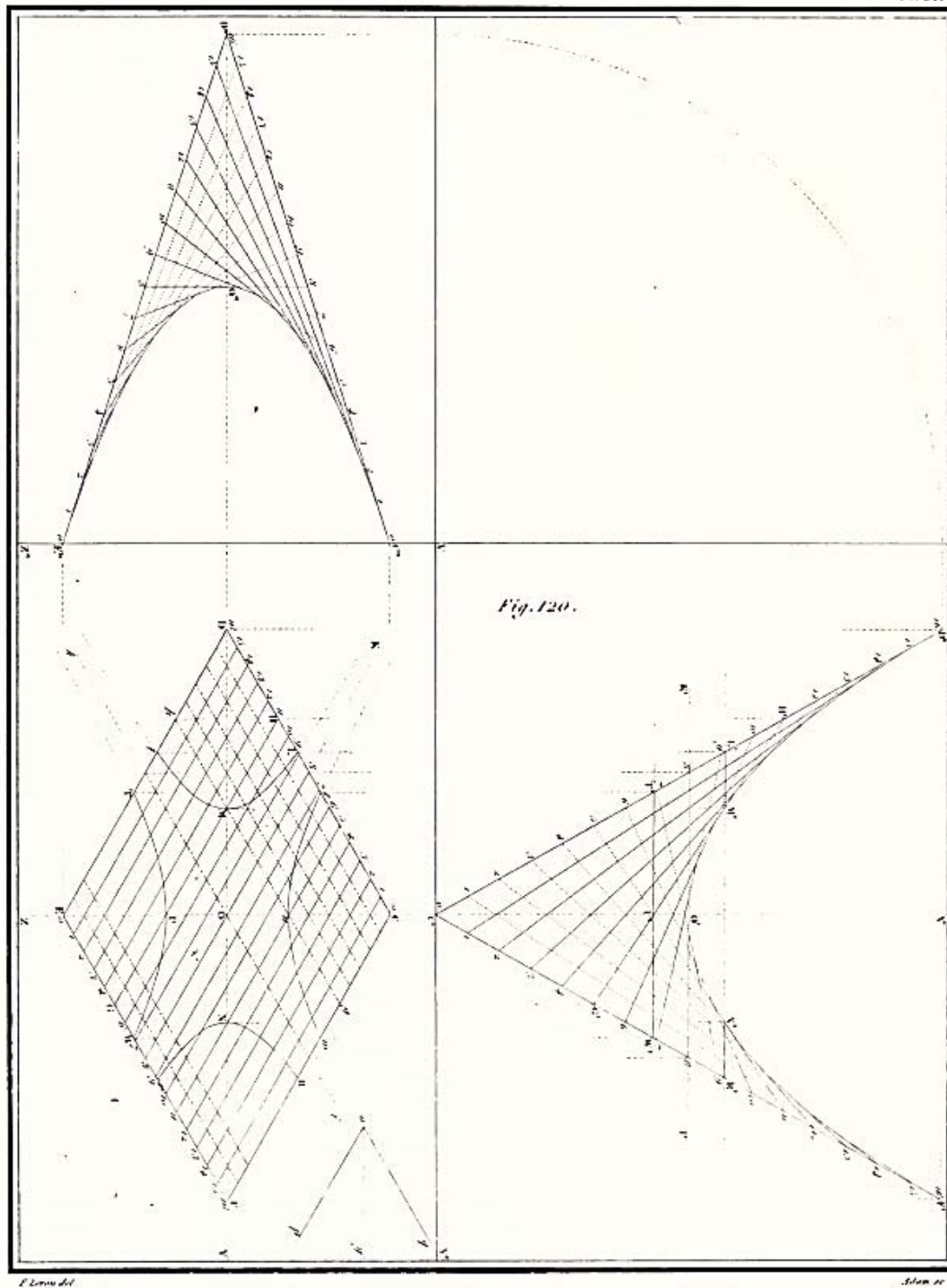
som et linjestykke og ikke blot som siden i en forkant. Vi overfører derefter delepunktet U til det tilsvarende delepunkt V på siden CD . Det er særligt simpelt i et kvadrat, hvor vi blot kan oprette en vinkelret gennem U ! Derefter overføres punkterne U og V som vist til opstalten ved hjælp af parallelle linjer, der jo bevarer delingsforhold. Til sidst konstrueres forbindelsesstykket UV i opstalten.

- d) Vi er nu klar til at konstruere fladen som et geometrisk sted. Først arbejder vi oppe i plantegningen, hvor vi udpeger U som det frie punkt, der driver forbindelsesstykket UV i kvadratet. Derefter arbejder vi nede i opstalten, hvor vi igen udpeger det frie punkt U i kvadratet i toppen, men denne gang driver det forbindelsesstykket UV i opstalten. Derved fås som vist frembragt tegninger af fladen set fra oven henholdsvis fra siden. Kontroller at fladen drejer med rundt, når du trækker i punktet A i plantegningen. Du skulle nu gerne kunne få en god fornemmelse for fladen, når du drejer figuren.



- e) **Udfordring:** Du kan også tilføje farvelægninger af de to trekanter. Udfordringen er da at vi skal skelne mellem om det er den gule trekant ABC , der ligger forrest eller den orange trekant BCD , der ligger forrest. Vi skal altså have styr på om det er punktet A eller punktet D der ligger forrest oppe i kvadratet. Vi opretter derfor målingerne af linjestykkerne AA og DD , der forbinder de korresponderende punkter i plan og opstalt. Når A ligger forrest er AA kortest og dermed er $DD-AA$ positiv. Vi kan derfor bruge $DD-AA$ som en teststørrelse til at afgøre om det er A eller D , der ligger forrest. Vi lagrer derfor værdien af $DD-AA$ i testvariablen **front**. Vi opretter derefter skæringspunktet (sort) mellem siderne AC og BD . Tilsvarende opretter vi skæringspunktet (hvidt) mellem siderne AB og CD . Trekantstykkerne AB_{sort} henholdsvis ACH_{vidt} skal nu altid farves gult. Tilsvarende skal trekantstykkerne DC_{sort} og DB_{hvidt} nu altid farves orange. Men fællesstykkerne fornedet, dvs. stykkerne BC_{sort} og BCH_{vidt} skal farvelægges gult, når A ligger forrest og orange når D ligger forrest. Det kræver en betinget farvelægning, der må oprettes to gange for gul henholdsvis orange! Det er lidt finurligt, men det er flot, når det virker!

Når du har gennemført den ovenstående øvelse har du nu med moderne dynamisk geometri opnået det samme som Leroy opnåede i sin deskriptive geometri i den lærebog, som Gaudi blev undervist efter da han selv studerede arkitektur. Læg mærke til hvordan den geometriske konstruktion af en parabelbue ligger gemt i tegningerne!

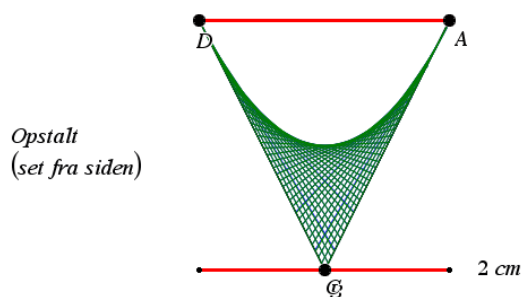
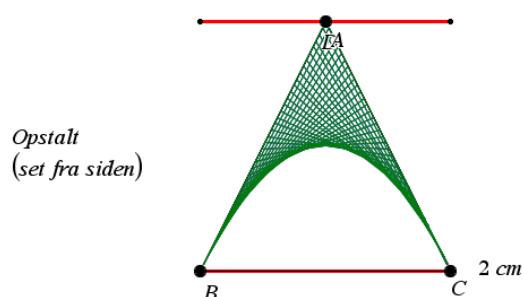
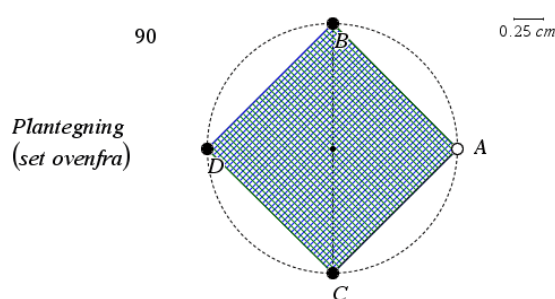
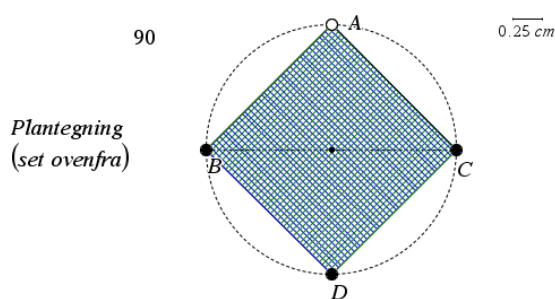


Gaudis lærebog i deskriptiv geometri: Leroy, *Traité de Géométrie Descriptive*

Du kan finde lærebogen på nettet (hvor de klassiske lærebøger er tilgængelige via Googles indscanning af verdenslitteraturen):

<http://ia600308.us.archive.org/8/items/traitledegom01lerouoft/traitledegom01lerouoft.pdf>

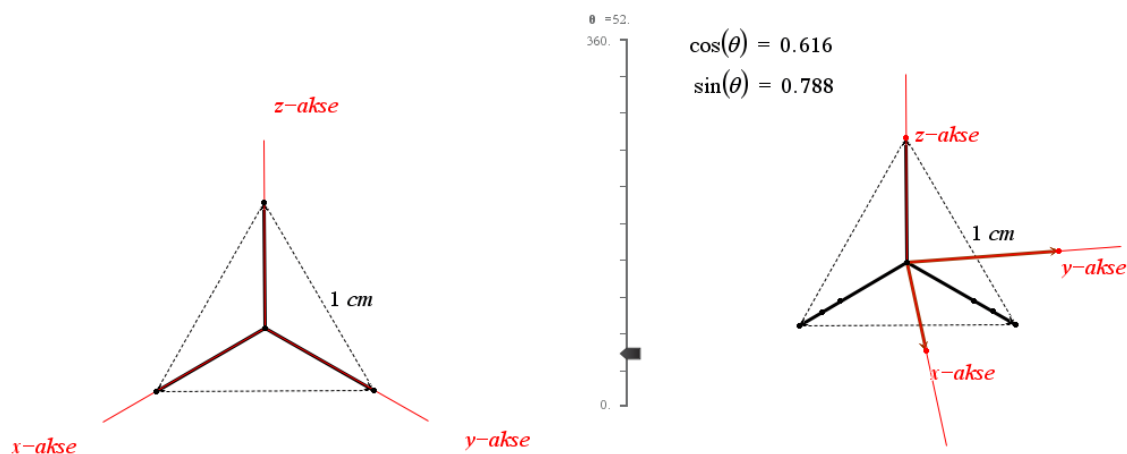
Det eneste der mangler er det andet sæt frembringere, men det kan du tilføje ved også at lade et linjestykke glide langs den anden side AC.



En helt anden mulighed ligger i at konstruere en isometrisk tegning af situationen. Dertil skal vi først oprette et isometrisk koordinatsystem, som vi efterfølgende drejer omkring z-aksen, så hele figuren kan drejes i det vandrette plan præcis som før. Det kan du prøve kræfter med i den følgende øvelse, hvor vi arbejder med den samme vindskæve firkant som foroven, dvs. hjørnerne har koordinaterne

$$A(1,1,1), B(-1,1,-1), C(1,-1,-1) \text{ og } D(-1,-1,1).$$

Men først skal vi have styr på det isometriske koordinatsystem:

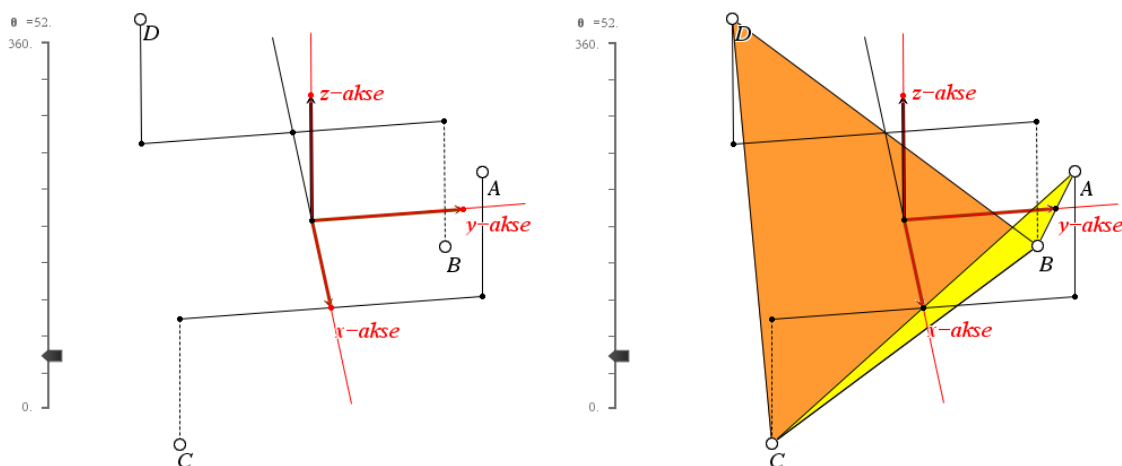


Øvelse 2.6

- Opret en ligesidet trekant som en regulær polygon og tilføj de tre basisvektorer fra centrum af den ligesidede trekant. Tilpas længden af basisvektorerne, så den er 1cm (med et passende valg af skalalængden i øverste højre hjørne, fx 0.25 cm). Tilføj koordinataksene som halvlinjer. Du har nu oprettet et isometrisk koordinatsystem!
- For at kunne dreje koordinatsystemet omkring den lodrette z-akse oprettes en skyer med drejningsvinklen θ samt tekstbokse med teksterne $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$. Tekstboksene beregnes, så vi

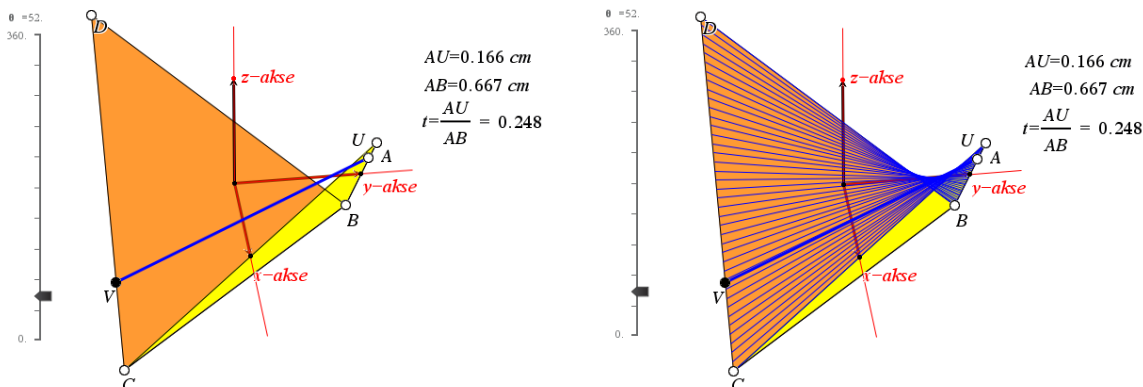
har adgang til cosinus og sinus hørende til drejningsvinklen. Vi overfører nu værdierne for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ til x-aksen og y-aksen ved at bruge **Overfør måling** på basisvektorerne (som en hver anden koordinat, der overføres). Herefter kan man nemt ved hjælp af en parallelforskydning frembringe punkterne med koordinaterne $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ og $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ (klik på start og slutpunktet for forskydningen og derefter på det punkt der skal forskydes). De udgør slutpunkterne for de nye basisvektorer der tegnes op. Du har nu oprettet et isometrisk koordinatsystem, der kan drejes om z-aksen ved at trække i skyderen!

Herefter går vi i gang med at konstruere den hyperbolske paraboloid:



Øvelse 2.7

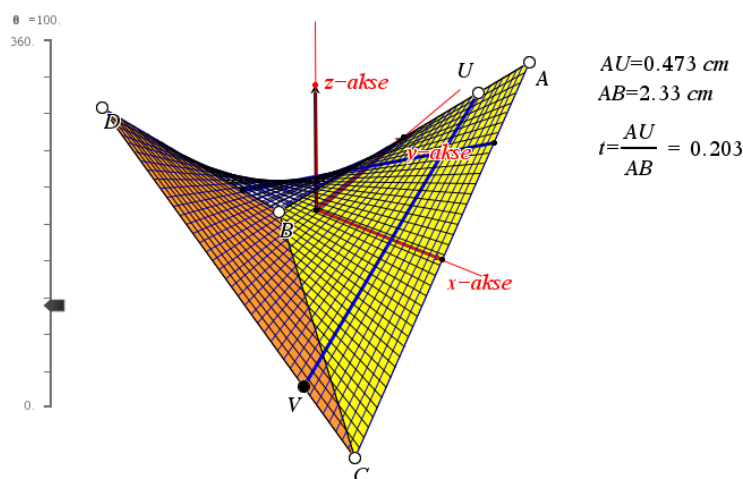
- Først afsættes punkterne $A(1,1,1)$, $B(-1,1,-1)$, $C(1,-1,-1)$ og $D(-1,-1,1)$ ved hjælp af passende forskydninger ud fra basisvektorerne. Da alle koordinater er ± 1 behøver vi ikke først overføre koordinaterne som målinger til basisvektorerne ☺.
- Derefter konstrueres den gule deltrekant ABC og den orange deltrekant BCD i den vindskæve firkant. Hvis du har mod på det kan du fremstille en korrekt farvelægning, der afhænger af drejningsvinklen, så det er den trekant, der ligger forrest, der vinder farvelægningen ☺. Overvej da først at deltrekanten ABC vinder, hvis $0 \leq \theta < 120^\circ$ eller $240^\circ < \theta \leq 360^\circ$. Det udnyttes i det følgende i de betingede farvelægninger af trekanten. Husk at farvelægge den bagerste trekant først! Du får brug for at oprette flere kopier af trekanterne. Anden gang kan de oprettes som polygoner fx med indskudte midtpunkter på siderne for at 'narre' TI-Nspire CAS til at tro at der er tale om en ny figur ☺



- Vi er nu klar til at konstruere fladen. Først oprettes delepunktet U på linjestykket AB (husk at du skal have oprettet AB som et linjestykke og ikke bare som en side i en trekant). Derefter måles delingsforholdet $t = AU/AB$. Vi kan så overføre delingsforholdet til den modstående side CD ved

hjælp af en multiplikation af slutpunktet D ud fra startpunktet C . Derved fremkommer delepunktet V . Endelig forbinder vi delepunkterne U og V .

- d) Tilslut frembringes fladen som et geometrisk sted for forbindelsesstykket UV drevet af delepunktet U . Du kan få en bedre fornemmelse for fladen ved at dreje den. Endelig kan du tilføje de tilsvarende delepunkter på de resterende to sider og også forbinde dem med et linjestykke, der frembringer et geometrisk sted drevet af delepunktet U . På den måde kan du fremstille fladen ud fra en dobbelt net af rette linjer på kryds og tværs i den vindskeve firkant ☺



Det er slet ikke nogen dårlig gengivelse af den hyperbolske paraboloid, men der er nogle indbyggede problemer. Fx kan du ikke skjule nettet, når det ligger bag ved trekantstykkerne. Det er også fristende at vippe med z-aksen, men så skal vi tilbage og frembringe et fuldstændigt frit isometrisk koordinatsystem, hvilket kræver en hel del mere geometri ☺. Vi har tydeligvis nået grænsen for hvor langt vi kan komme i et 2-dimensionalt geometriprogram og løfter derfor nu scenen til et ægte 3-dimensionalt graftegneprogram!

Åbn derfor et Graf-værksted og gå ind i **Vis**-menuen og skift til **3d-graftegning**! Skift også graftype til Parameterfremstilling.

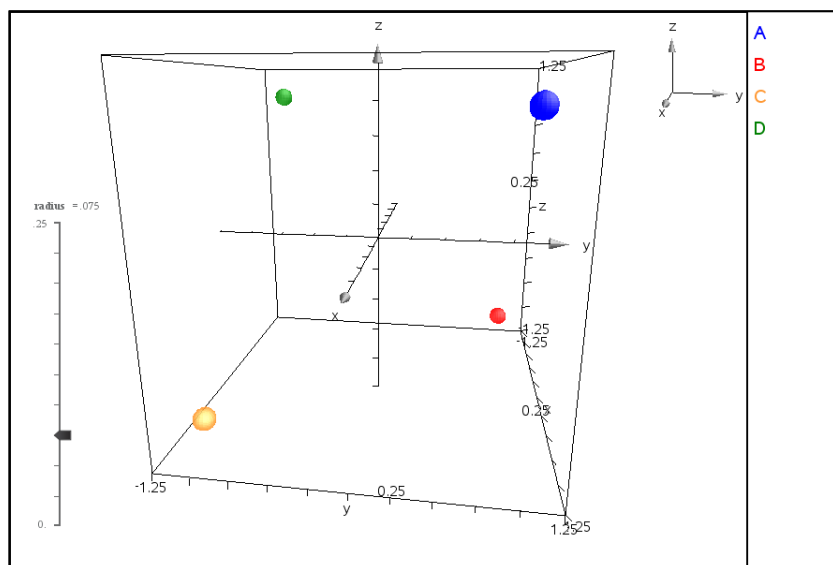
Det første problem vi løber ind i er da hvordan vi får tegnet punkterne A , B , C og D . Hvis vi bare indtaster deres koordinater i parameterfremstillingen er de usynlige, selv når man sætter linjetykkelsen voldsomt op ☺. Der er ingen punkter. Så de skal opfædes for at man kan se dem. Vi tegner dem derfor som små kugler. I et noteværksted indskrives de fire punkters koordinater og derefter oprettes de som punkter:

```

a:={ 1,1,1 } : b:={ -1,1,-1 } : c:={ 1,-1,-1 } : d:={ -1,-1,1 } ▶ { -1,-1,1 }
kugle:={ cos(t)·sin(u),sin(t)·sin(u),cos(u) } ▶ { cos(t)·sin(u),sin(t)·sin(u),cos(u) }
pta:=a+radius·kugle ▶ { radius·cos(t)·sin(u)+1,radius·sin(t)·sin(u)+1,radius·cos(u)+1 }
ptb:=b+radius·kugle ▶ { radius·cos(t)·sin(u)-1,radius·sin(t)·sin(u)+1,radius·cos(u)-1 }
ptc:=c+radius·kugle ▶ { radius·cos(t)·sin(u)+1,radius·sin(t)·sin(u)-1,radius·cos(u)-1 }
ptd:=d+radius·kugle ▶ { radius·cos(t)·sin(u)-1,radius·sin(t)·sin(u)-1,radius·cos(u)+1 }

```

Hvis du ikke har set standardparameterfremstillingen for en kugle, så accepter den bare midlertidigt som en generalisering af standardparameterfremstillingen for en cirkel ☺. Vi vender tilbage til trigonometriske parameterfremstillinger i næste afsnit. Den bruger netop standardparameterintervallerne $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq \pi$. Variablen **radius** er en skydervariabel, som vi bruger til at afgøre hvor store kuglerne skal fremstå.



Øvelse 2.8

- a) Opret koordinater og parameterfremstillinger for punkterne som vist. Indfør en skyder for **radius**, der passende kan løbe fra 0 til 0.25 i skridt med længden 0.001. Skift koordinatsystemets grænser til at gå fra $-1.25 \leq x \leq 1.25$, $-1.25 \leq y \leq 1.25$, $-1.25 \leq z \leq 1.25$. Du indskrives nu punkternes parameterfremstillinger på følgende vis:

$$xp1(t,u) = pta[1]$$

$$yp1(t,u) = pta[2]$$

$$zp1(t,u) = pta[3]$$

hvor $pta[1]$ står for førstekoordinaten til pta , dvs. punktet A, osv. Punkterne skulle da gerne dukke op på skærmen! Du kan skifte farve på dem på sædvanlig vis og du kan også skifte attributter. Fx viser vi dem her som ren flade uden gitternet. Vi kan ikke navngive objekter i 3d-graftegning, men som vist kan vi oprette en smal noteside ved siden af grafrummet, hvor vi kan farvelægge navnene, så man hurtigt kan se at det blå punkt i grafen fx må svare til A!

Det næste vi skal have tilføjet i 3d-graftegningen er linjestykkerne AB , AC , BD og CD . Det er nemt nok at tegne et linjestykke AB . Hertil bruges parameterfremstillingen

$$P = (1-t) \cdot A + t \cdot B = A + t \cdot (B - A), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Det er ækvivalent med vektorligningen

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Vi opretter derfor de fire linjestykker på notesiden på følgende vis

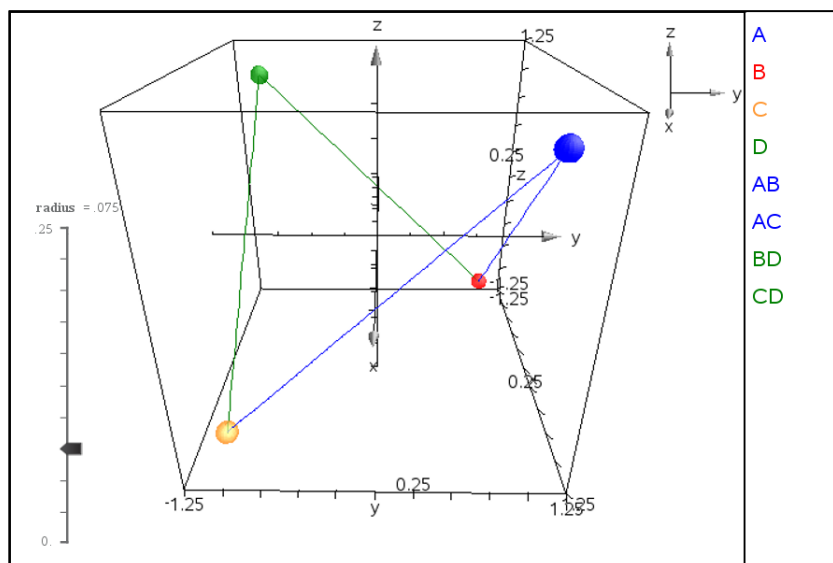
$$ab := (1-t) \cdot a + t \cdot b \rightarrow \{ 1-2 \cdot t, 1, 1-2 \cdot t \}$$

$$ac := (1-t) \cdot a + t \cdot c \rightarrow \{ 1, 1-2 \cdot t, 1-2 \cdot t \}$$

$$bd := (1-t) \cdot b + t \cdot d \rightarrow \{ -1, 1-2 \cdot t, 2 \cdot t-1 \}$$

$$cd := (1-t) \cdot c + t \cdot d \rightarrow \{ 1-2 \cdot t, -1, 2 \cdot t-1 \}$$

Når vi tegner linjestykkerne skal vi så huske at rette parameterintervallet til $0 \leq t \leq 1$ ☺.



- b) Opret parameterfremstillinger for siderne som vist. Du indskrives nu sidernes parameterfremstillinger på følgende vis:

$$xp5(t,u) = ab[1]$$

$$yp5(t,u) = ab[2]$$

$$zp5(t,u) = ab[3]$$

hvor $ab[1]$ står for første koordinaten til ab , dvs. linjestykket AB , osv. Linjestykkerne skulle da gerne dukke op på skærmen! Du kan ikke skifte farve på dem ved at fange dem på skærmen. Men taster du CTRL G kan du fange dem på indtastningslinjen og der kan du højreklikke på dem for at få adgang til at skifte farve! Du kan også tydeliggøre dem ved at sætte linjetykkelsen (nederst til højre på statusbjælken) op til fx 125 %.

Så er vi endelig klar til at tegne den guddommelige flade, der udspænder den vindskeve firkant, så trekanten ABC fungerer som tangentflade i startpunktet og trekanten BCD fungerer som tangentflade i slutpunktet. Vi generaliserer da Gaudikonstruktionen ved at forbinde AB og CD med et linjestykke, der glider jævnt langs de to modstående sider. Dette linjestykke frembringer da en enkeltretlinjet flade med forbindelseslinjestykket som frembringer: Linjestykkets endepunkter P og Q er da givet ved

$$P = (1-t) \cdot A + t \cdot B, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$Q = (1-t) \cdot C + t \cdot D, \quad 0 \leq t \leq 1$$

idet de begge deler deres respektive sider AB og CD i deleforholdet t . Vi har skiftet betegnelser til P og Q fordi U er reserveret til navnet på parameteren i parameterfremstillingen! Selve linjestykket PQ er da givet ved parameterfremstillingen

$$PQ = (1-u) \cdot P + u \cdot Q$$

Kombinerer vi disse to sæt parameterfremstillinger fås derfor den følgende simple parameterfremstilling for fladen

$$ABCD = (1-u) \cdot [(1-t) \cdot A + t \cdot B] + u \cdot [(1-t) \cdot C + t \cdot D]$$

Men her kommer så første overraskelse! Ganger vi parenteserne ud og rokerer rundt på leddet kan den præcis samme parameterfremstilling også skrives på formen

$$ABCD = (1-u) \cdot (1-t) \cdot A + (1-u) \cdot t \cdot B + u \cdot (1-t) \cdot C + u \cdot t \cdot D$$

$$ABCD = (1-t) \cdot [(1-u) \cdot A + u \cdot C] + t \cdot [(1-u) \cdot B + u \cdot D]$$

Kig nøje på den sidste formel: Den har nøjagtigt den samme struktur som den første formel. Men denne gang forbinder vi et punkt på siden AC med et punkt på siden BD . Gennem ethvert punkt på den guddommelige flade $ABCD$ går der altså præcis to rette linjer, der ligger helt indesluttet i fladen: Det ene forbinder de modstående sider AB og CD , det andet forbinder de to modstående sider AC og BD . Fladen er altså født dobbeltretlinjet!

Vi lægger ud med at tegne det linjestykke PQ , der frembringer fladen. Vi opretter derfor en skyggevariabel t_- , da t er reserveret til navnet på parameteren i parameterfremstillingen! Skyggevariablen oprettes som en skydervariabel, der løber fra 0 til 1.

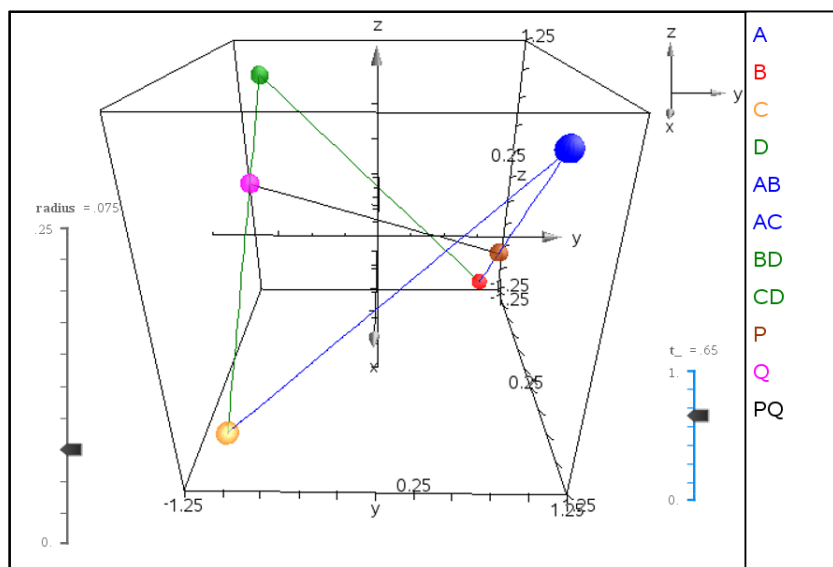
$$p := (1-t_-) \cdot a + t_- \cdot b \rightarrow \{1-2 \cdot t_-, 1-2 \cdot t_-\}$$

$$q := (1-t_-) \cdot c + t_- \cdot d \rightarrow \{1-2 \cdot t_-, -1, 2 \cdot t_- - 1\}$$

$$ptp := p + radius \cdot kugle \rightarrow \{radius \cdot \cos(t) \cdot \sin(u) - 2 \cdot t_- + 1, radius \cdot \sin(t) \cdot \sin(u) + 1, radius \cdot \cos(u) - 2 \cdot t_- + 1\}$$

$$ptq := q + radius \cdot kugle \rightarrow \{radius \cdot \cos(t) \cdot \sin(u) - 2 \cdot t_- + 1, radius \cdot \sin(t) \cdot \sin(u) - 1, radius \cdot \cos(u) + 2 \cdot t_- - 1\}$$

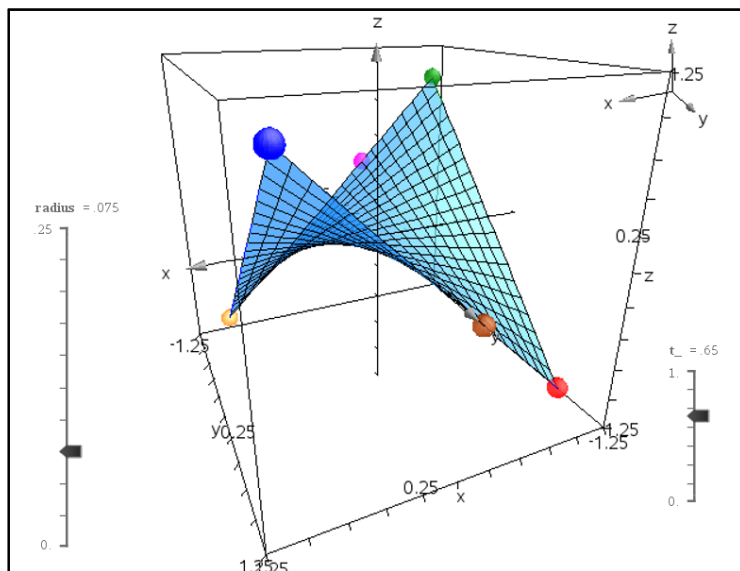
$$pq := (1-t_-) \cdot p + t_- \cdot q \rightarrow \{-(2 \cdot t_- - 1), 1-2 \cdot t_-, (2 \cdot t_- - 1) \cdot (2 \cdot t_- - 1)\}$$



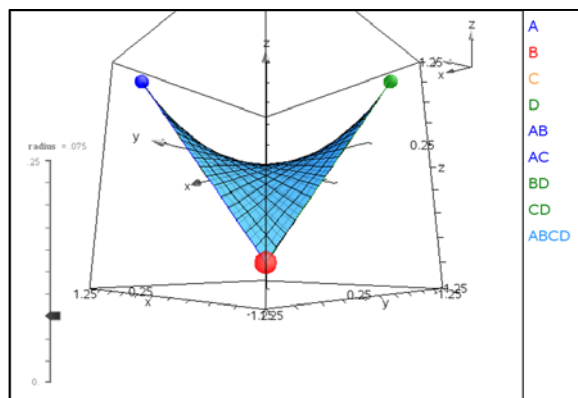
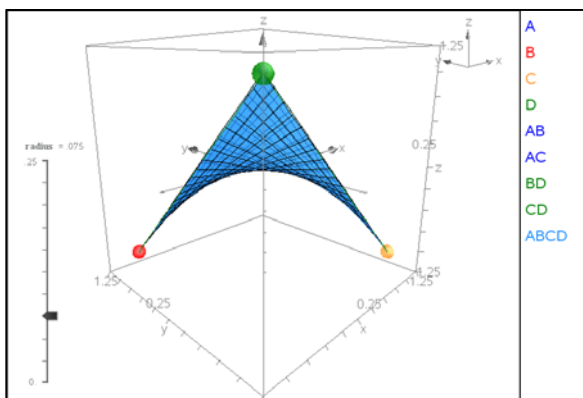
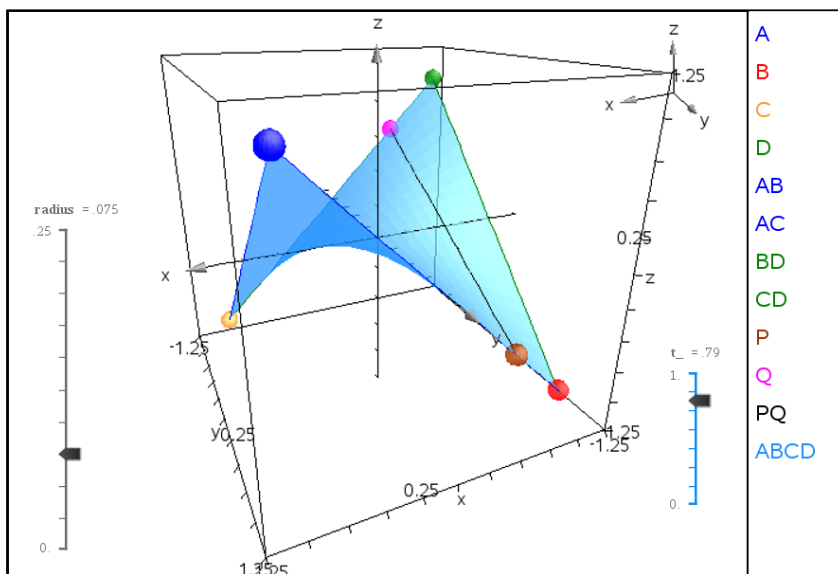
- c) Opret parameterfremstillinger for punkterne P og Q samt deres forbindelsesstykke PQ som vist. Farvelæg punkterne og linjestykket som vist, så vi hurtigt kan identificere dem på skærmen. Træk i skyderen for skyggevariablen t_- , så du kan se linjestykket glide langs siderne i den vindskeve firkant.

Vi er nu klar til at tegne selve fladen. Den er givet ved parameterfremstillingen

$$ABCD = (1-u) \cdot [(1-t) \cdot A + t \cdot B] + u \cdot [(1-t) \cdot C + t \cdot D], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1$$



- d) Indskriv parameterfremstillingen for fladen og du skulle gerne se din første *hyper* dukke op i 3d-graftegningsrummet! Prøv at gribe fat i scenen så du kan se den fra forskellige synsretninger inklusive standardretningerne hvor vi kigger ind langs en af koordinataksene (her kan du bare taste x, y eller z). Slukker du for gitternettet kan du også nemmere se forbindelsesstykket PQ glide langs fladen, når du trækker i t_{-} -skyderen.



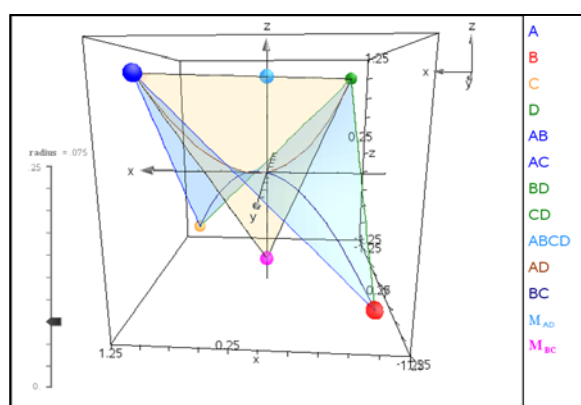
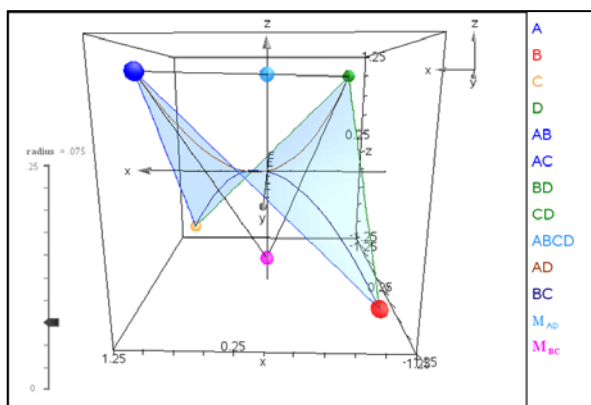
Dernæst bemærker vi at fladen indeholder parabler: Sætter vi $u=t$, dvs. bevæger os langs hoveddiagonalen i parameterrummet fås parameterkurven:

$$P = (1-t)^2 \cdot A + (1-t) \cdot t \cdot B + t \cdot (1-t) \cdot C + t^2 \cdot D$$

$$P = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \frac{B+C}{2} + t^2 \cdot D$$

$$P = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot M_{BC} + t^2 \cdot D$$

Men det er jo netop parameterfremstillingen for parabelen udspændt i trekanten $AM_{BC}D$, hvor de to mellempunkter B og C altså erstattes af deres midtpunkt, jfr. øvelse 2.2.



Omskriver vi parameterfremstillingen ved at gange parenteserne ud fås

$$P = A + 2t \cdot (-A + M_{BC}) + t^2 \cdot (A + D - 2M_{BC})$$

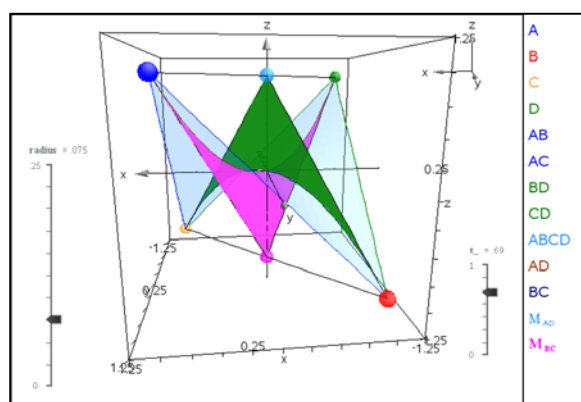
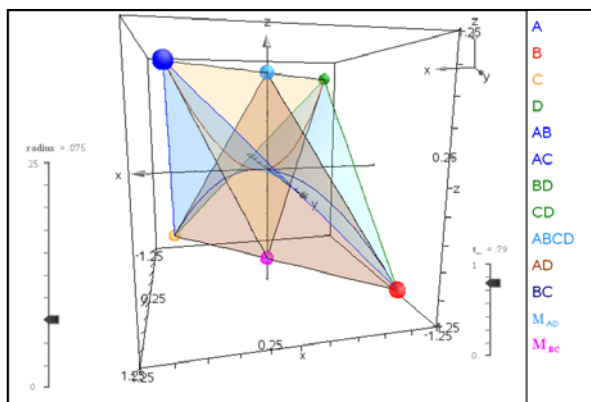
$$P = A + 2t \cdot (-A + M_{BC}) + t^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{A + D}{2} - M_{BC} \right)$$

$$P = A + 2t \cdot (-A + M_{BC}) + t^2 \cdot 2 \cdot (M_{AD} - M_{BC})$$

Det viser, at parablen starter i A med tangentvektoren $\overrightarrow{AM_{BC}}$. (Tilsvarende slutter den i D med tangentvektoren $\overrightarrow{M_{BC}D}$). Endelig har den accelerationsvektoren, dvs. aksevektoren $\overrightarrow{M_{AD}M_{BC}}$: Parablen's akse er altså parallel med den linje, der forbinder midtpunkterne for diagonalerne BC og AD i den vindskæve firkant. Denne parabel udgør ryggraden i den guddommelige flade!

Øvelse 2.9

- a) Tegn nu selv parablen, der fremkommer når man sætter $u = t$ i parameterfremstillingen. Tilføj også trekanten $AM_{BC}D$. Du kan evt. trække trekantes indre op, idet en trekant ABC kan tegnes som en *hypar* AABC! Tegner du i stedet hyparen ABBC trækkes parabelsegmentet i trekanten op!



Øvelse 2.10

- a) Gør rede for at *sidediagonalen* $u = 1 - t$ i parameterrummet på samme måde overføres i en parabel, der udspringer af trekanten BCM_{AD} .
- b) Gør rede for at denne parabel har aksevektoren $\overrightarrow{M_{BC}M_{AD}}$, dvs. modsat rettet den foregående, dvs. hvis den ene er sur er den anden glad.

Øvelse 2.11

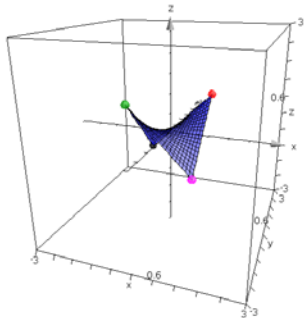
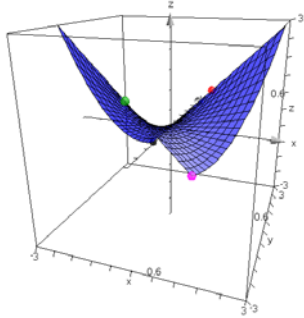
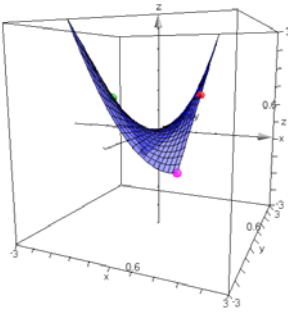
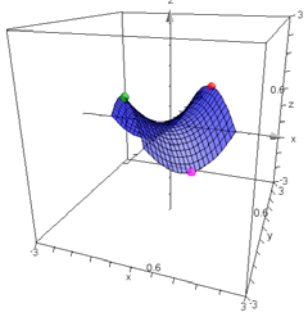
- a) Gør rede for at alle linjerne parallel med sidediagonalen, dvs. på formen $u = k - t$ hvor $0 < k < 2$ på samme måde overføres i parabler med akser, der er parallelle med linjen, der forbinder midtpunkterne for diagonalerne BC og AD i den vindskæve firkant.

Som det fremgår af øvelserne kan den guddommelige flade altså også frembringes af en sur parabel (svarende til linjerne parallelle med sidediagonalen i parameterrummet), der glider langs en glad parabel (rygraden). Ikke overraskende kaldes den guddommelige flade for en paraboloid! Gennem hvert punkt på fladen går der to sæt parabler, der vender hver sin vej. Fladen er altså en *saddelflade*.

Øvelse 2.12

- a) Gør rede for at fladepunktet svarende til $t = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{2}$ netop er tyngdepunktet T for den vindskeve firkant $ABCD$, dvs. $T = \frac{A+B+C+D}{4}$.
- b) Gør rede for at firkanten, der forbinder midtpunkterne i de fire sider: AB , AC , BD og CD i den vindskeve firkant, må være et parallelogram. Gør rede for at diagonalerne i dette parallelogram netop skærer hinanden i tyngdepunktet T .
- c) Gør rede for at diagonalerne i midtpunktsparallelogrammet netop er frembringere for fladen, dvs. de ligger helt i fladen. Midtpunktsparallelogrammet er med andre ord en tangentplan i tyngdepunktet.
- d) Gør rede for at de to parabler svarende til $u = t$ (rygraden) og $u = 1 - t$ tangerer midtpunktsparallelogrammet fra hver sin side.

Vi kan sammenfatte vores hidtige erfaringer med parameterfremstillinger således, idet vi frit kan vælge om en frembringer skal være en ret linje eller en hovedparabel:

$\backslash t\text{-kurver}$ $u\text{-kurver} \backslash$	Skrå linjer	Parabler ($t \rightarrow t+u$)
Skrå linjer	 $(1-u) \cdot ((1-t) \cdot A + t \cdot B) \quad 0 \leq t \leq 1$ $+ u \cdot ((1-t) \cdot C + t \cdot D) \quad 0 \leq u \leq 1$	 $(1-u) \cdot ((1-t-u) \cdot A + (t+u) \cdot B) \quad -1 \leq t \leq 1$ $+ u \cdot ((1-t-u) \cdot C + (t+u) \cdot D) \quad 0 \leq u \leq 1$
Parabler ($u \rightarrow t-u$)	 $(1-t+u) \cdot ((1-t) \cdot A + t \cdot B) \quad 0 \leq t \leq 1$ $+ (t-u) \cdot ((1-t) \cdot C + t \cdot D) \quad -1 \leq u \leq 1$	 $(1-t+u) \cdot ((1-t-u) \cdot A + (t+u) \cdot B) \quad 0 \leq t \leq 1$ $+ (t-u) \cdot ((1-t-u) \cdot C + (t+u) \cdot D) \quad -\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$

3.2 Den hyperbolske paraboloid som graf for et andegradspolynomium: $z = x \cdot y$, $z = x^2 - y^2$

Vi ser stadigvæk på den vindskæve firkant med hjørnerne

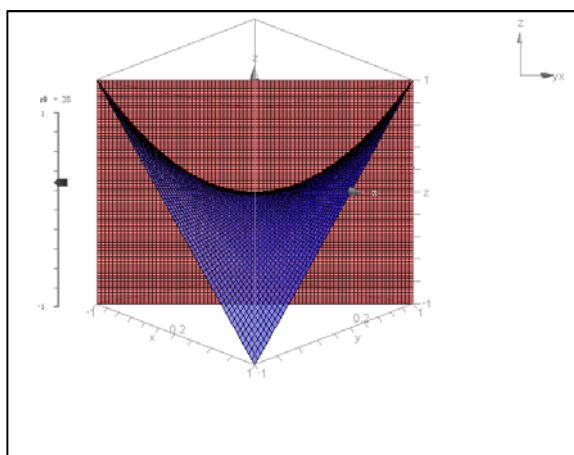
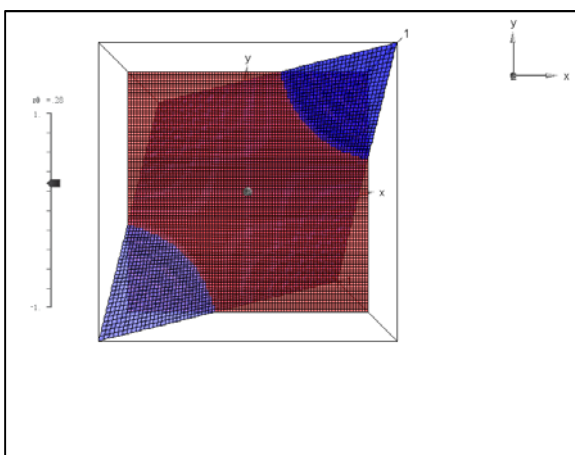
$$A(1,1,1), B(-1,1,-1), C(1,-1,-1) \text{ og } D(-1,-1,1)$$

Den udspænder en hyperbolsk paraboloid, som i en vis forstand er prototypen for hyperbolske paraboloider. Som vi har set er den givet ved parameterfremstillingen

$$ABCD = (1-u) \cdot ((1-t) \cdot A + t \cdot B) + u \cdot ((1-t) \cdot C + t \cdot D), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Øvelse 2.13

- Gør rede for at fladens ligning er givet ved $z = x \cdot y$. Tegn denne flade som en 3d-graf med $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. Gør rede for hvorfor den kaldes en sadelflade.
- Gør rede for at skæringen med en lodret plan $x = x_0$ er en ret linje med hældning x_0 . Opret en skyder for x_0 og tegn den lodrette plan i grafrummet $x = x_0$ så man kan se skæringslinjen.
- Gør rede for at skæringen med en lodret plan $y = y_0$ er en ret linje med hældning y_0 . Opret en skyder for y_0 og tegn den lodrette plan i grafrummet $y = y_0$ så man kan se skæringslinjen.
- Gør rede for at de retlinjede frembringere enten er parallelle med y - z -planen eller med x - z -planen.



Øvelse 2.14

- Gør rede for, at niveaukurverne for fladen med ligningen $z = x \cdot y$ er ligesidede hyperbler med undtagelse af skæringen med x - y -planen $z = 0$, der degenererer til de to asymptoter x -aksen og y -aksen. Opret en skyder for z_0 og tegn den vandrette plan i grafrummet $z = z_0$ så man kan se skæringslinjen.
- Gør rede for at skæringen med planen $y = x$ er en enhedsparabel, der vender grenene opad, samt at skæringen med planen $y = -x$ er en enhedsparabel, der vender grenene nedad. Opret en skyder $x = t$ for k_0 med $-2 \leq k_0 \leq 2$ og tegn lodrette planer i grafrummet $y = t + k_0$ med $-1 \leq t \leq 1$ og $-1 \leq u \leq 1$ $z = u$ så man kan se skæringskurverne.
- Gør rede for at skæringen med en lodret plan er en parabel med undtagelse af de lodrette planer, der også er parallelle med x -aksen eller y -aksen, hvor det jo er en ret linje. Prøv evt. om du kan illustrere det med en 3d-animation.

Vi ser at fladen giver anledning til parabler, når den skæres med en lodret plan og hyperbler, når den skæres med en vandret plan. Den kaldes derfor en **hyperbolsk paraboloid**. Men det afgørende er altså i virkeligheden at der er tale om en dobbelt retlinjet flade, den simpleste af slagsen!

Bemærkning: I den ovenstående fremstilling har vi lagt vægten på de retlinjede frembringere. Men som vi har set kunne vi lige så godt have frembragt fladen ud fra parabler som frembringere (hvilket selvfølgelig ikke er så praktisk, når man skal frembringe fladelementer konkret i fx beton). Forbindelse mellem de to systemer af frembringere fremstår klart ved en drejning af koordinatsystemet: En drejning på 45° vil da netop skifte mellem koordinatlinjer som rette linjer og koordinatlinjer som parabler. Årsagen til dette er meget simpel. Ved en drejning på 45° føres koordinataksene over i linjerne $y = \pm x$. Sammenhængen mellem de gamle og de nye koordinater er derfor – op til en skalering – givet ved

$$x = X + Y$$

$$y = X - Y$$

Indsættes dette i ligningen for den hyperbolske paraboloid fås derfor den beslægtede ligning

$$z = x \cdot y = (X + Y) \cdot (X - Y) = X^2 - Y^2$$

Vi kan altså illustrere dette ved at tegne paraboloiden med forskriften $z = x^2 - y^2$.

Øvelse 2.15

- a) Tegn fladen med ligningen $z = x^2 - y^2$ med $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$. Sluk for gitternettet og farv fladen lyseblå med rimelig høj transparens.

- b) Tilføj den røde parabel $z = x^2, y = 0$ ved hjælp af parameterfremstillingen

$$x = t$$

$$y = 0 \text{ med } -1 \leq t \leq 1$$

$$z = t^2$$

Husk at ændre parameterintervallet og husk også at sætte antal t -intervaller op fx til 101 delepunkter. Du får adgang til attributter og farve ved at højreklikke i indtastningslinjen for parameterfremstillingen!

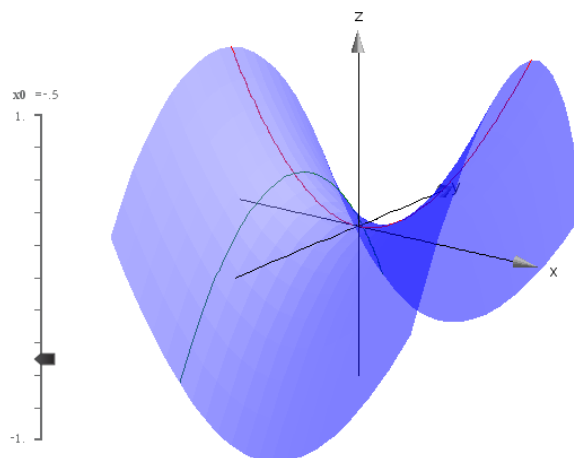
- c) Tilføj derefter den grønne parabel $z = x_0^2 - y^2, x = x_0$ ved hjælp af parameterfremstillingen

$$x = x_0$$

$$y = t \text{ med } -1 \leq t \leq 1$$

$$z = x_0^2 - t^2$$

- d) Indfør endelig en skyder for parameteren x_0 , der løber fra -1 til 1. Du kan nu se hvordan fladen frembringes af en grøn sur parabel der glider langs en rød glad parabel.



Øvelse 2.16

- a) Vi vender tilbage til fladen med ligningen $z = x \cdot y$ med $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$, hvor koordinatlinjerne er rette linjer og et koordinatudsnit afbildes på en vindskef firkant, der udsprender et udsnit af fladen. Sluk for gitternettet og farv fladen lyseblå med rimelig høj transparens.

- b) Tilføj et gitter i bunden af scenen ved hjælp af parameterfremstillingen

$$x = t$$

$$y = u \quad -0.7 \leq t \leq 0.7, \quad -0.7 \leq u \leq 0.7$$

$$z = -1$$

hvor indskrænkningen i parameterintervallet skal sikre at vi kan dreje gitteret frit i sidste del af øvelsen indenfor rammerne af scenen!

- c) Tilføj det tilsvarende udsnit på fladen ved hjælp af parameterfremstillingen

$$x = t$$

$$y = u \quad -0.7 \leq t \leq 0.7, \quad -0.7 \leq u \leq 0.7$$

$$z = t \cdot u$$

- d) Vi skal nu kunne dreje udsnittet. Vi indfører derfor en skydervariabel θ for drejningsvinklen, der kan løbe fra 0° til 360° . Ved en sådan drejning erstattes basisvektorerne $\{1,0\}$ og $\{0,1\}$ af $\{\cos(\theta), \sin(\theta)\}$ og $\{-\sin(\theta), \cos(\theta)\}$. Ret derfor de to foregående parameterfremstillinger til

$$x = t \cdot \cos(\theta) + u \cdot \sin(\theta)$$

$$y = -t \cdot \sin(\theta) + u \cdot \cos(\theta) \quad -0.7 \leq t \leq 0.7, \quad -0.7 \leq u \leq 0.7$$

$$z = -1$$

henholdsvis

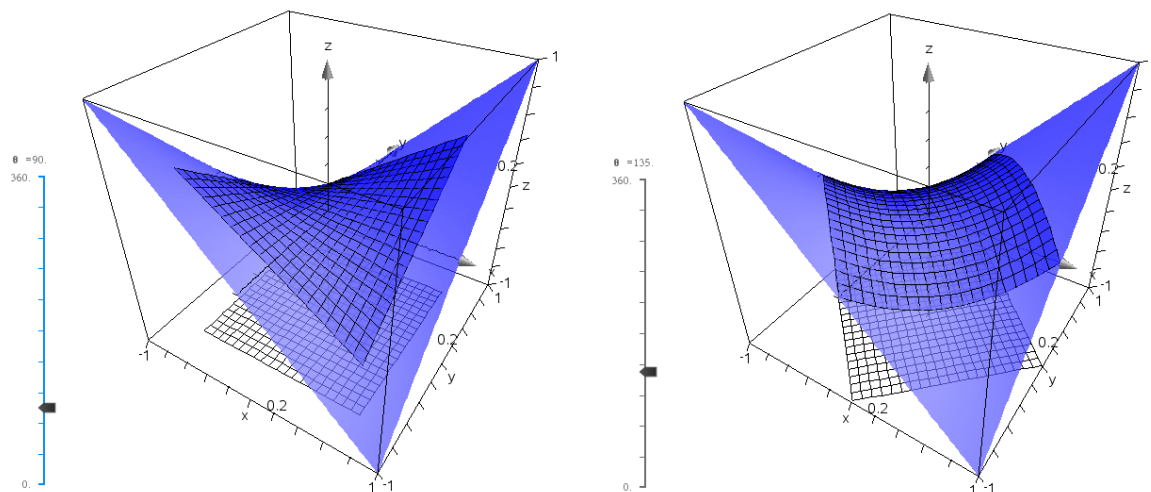
$$x = t \cdot \cos(\theta) + u \cdot \sin(\theta)$$

$$y = -t \cdot \sin(\theta) + u \cdot \cos(\theta)$$

$$-0.7 \leq t \leq 0.7, \quad -0.7 \leq u \leq 0.7$$

$$z = (t \cdot \cos(\theta) + u \cdot \sin(\theta)) \cdot (-t \cdot \sin(\theta) + u \cdot \cos(\theta))$$

- e) Prøv nu at dreje gitterudsnittet og hold især fokus på de retningsvinkler, hvor gitteret afbildes på rette linjer og de retningsvinkler, hvor gitteret afbildes på parablerne parallel med diagonalerne.



Samspillet mellem grafer for funktioner på den ene side og parameterfremstillinger på den anden side åbner også andre muligheder for at lægge mere struktur på graferne. En oplagt mulighed er fx at lægge skygger på figuren svarende til de retvinklede projektioner på scenens gulv og sidevægge, hvilket netop antyder hvordan en plantegning henholdsvis en opstalt kommer til at se ud.

Øvelse 2.17

- a) Tegn grafen for funktionen $z = x \cdot y$ som en parameterfremstilling, så der bliver luft til væggene:

$$x = t$$

$$y = u \quad -1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$$

$$z = t \cdot u$$

idet du sætter vinduesgrænserne til $-1.25 \leq x \leq 1.25, -1.25 \leq y \leq 1.25, -1.25 \leq z \leq 1.25$.

- b) Tilføj skygger i bunden og siderne ved hjælp af parameterfremstillingerne

$$x = t$$

$$\text{Bunden: } y = u \quad -1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$$

$$z = -1.25$$

$$x = -1.25$$

$$\text{Venstre sidevæg: } y = u \quad -1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$$

$$z = t \cdot u$$

$$x = t$$

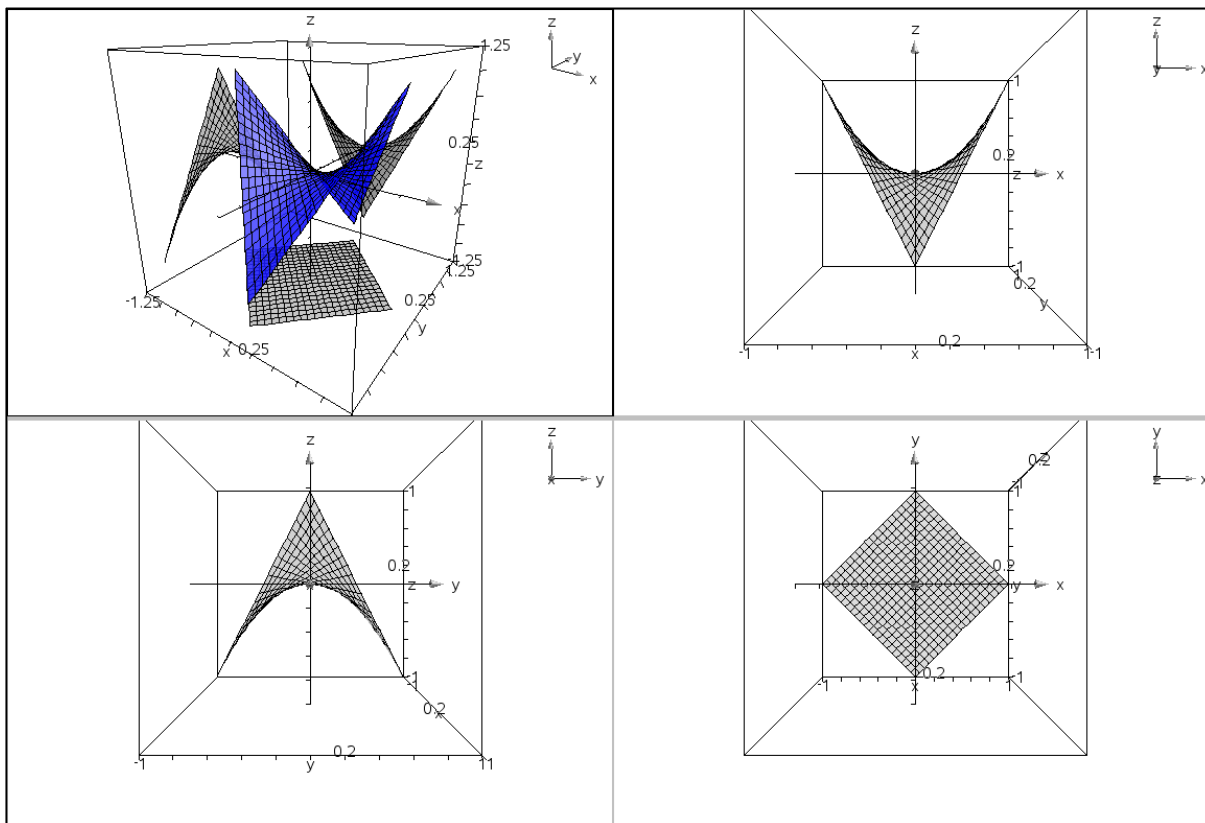
$$\text{Bagvæggen: } y = 1.25 \quad -1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$$

$$z = t \cdot u$$

Skyggerne kan passende farves grå.

- c) Vælg x -, y -, z -projektioner ved at taste x , y eller z , så du ser lige ind langs x -aksen, y -aksen eller z -aksen.

Som det ses svarer skyggerne netop til Leroys projektioner i den deskriptive geometri. Men til forskel fra Leroys tegninger har vi denne gang den ægte rumlige figur at støtte os til ☺.



2.3 Strukturen af en paraboloid

Som vi har set fører konstruktionen af den hyperbolske paraboloid til en dobbelt lineær parameterfremstilling af formen

$$P = (1-u) \cdot [(1-t) \cdot A + t \cdot B] + u \cdot [(1-t) \cdot C + t \cdot D]$$

I særligt simple tilfælde har vi også set at den fører til ligningerne $z = x \cdot y$ og $z = x^2 - y^2$ som er prototyperne for den hyperbolske paraboloid, den første knyttet til de retlinjede frembringere, den anden knyttet til hovedparablerne som frembringere.

Vi vil nu prøve at finde ligningen for den hyperbolske paraboloid i det generelle tilfælde. Vi skal da vælge koordinatsystemet behændigt, så z-aksen peger langs paraboloidens akse, dvs. forbindelseslinjen mellem diagonalernes midtpunkter M_{AD} og M_{BC} . Ganger vi parenteserne ud i parameterfremstillingen for fladen fås

$$\begin{aligned} P &= (1-u) \cdot [(1-t) \cdot A + t \cdot B] + u \cdot [(1-t) \cdot C + t \cdot D] = \\ P &= (1-u) \cdot (1-t) \cdot A + (1-u) \cdot t \cdot B + u \cdot (1-t) \cdot C + u \cdot t \cdot D \\ P &= A + t \cdot (-A+B) + u \cdot (-A+C) + t \cdot u \cdot (A-B-C+D) \\ P &= A + t \cdot (-A+B) + u \cdot (-A+C) + 2 \cdot t \cdot u \cdot \left(\frac{A+D}{2} - \frac{B+C}{2} \right) \end{aligned}$$

På vektorform gælder derfor

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} + u \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \cdot t \cdot u \cdot \overrightarrow{M_{BC}M_{AD}}$$

De lineære led fortæller da, at tangentplanen i startpunktet A udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, dvs. tangentplanen i A er netop udspændt af trekanten ABC. Det kvadratiske led afspejler tilsvarende fladens aksevektor $\overrightarrow{M_{BC}M_{AD}}$! Da den peger langs z-aksen har den ingen x- og y-koordinat. Skriver vi parameterfremstillingen op i koordinater fås derfor:

$$x = \text{førstegradspolynomium i } t \text{ og } u$$

$$y = \text{førstegradspolynomium i } t \text{ og } u$$

$$z = \text{andengradspolynomium i } t \text{ og } u$$

Når vi isolerer parametrene t og u fra de to første ligninger fås derfor førstegradspolynomier i x og y . Indsættes disse derefter i den sidste ligning fås et andengradspolynomium i x og y . Paraboloiden har altså en ligning på formen

$$z = \underbrace{a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2}_{\text{andengradsleddene}} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{\text{førstegradleddene}} + \underbrace{f}_{\text{konstantleddet}}$$

Detaljerne overlader vi til en øvelse ☺

Øvelse 2.18

For at forenkle undersøgelsen vil vi fastlægge koordinatsystemet yderligere, idet vi lægger Origo i A, dvs. A får koordinaterne $\{0,0,0\}$. Ydermere drejer vi koordinatsystemet omkring z-aksen, så punktet C kommer til at ligge i y-z-planen. Vi har da også $C_x = 0$.

- a) Gør rede for at vi finder en parameterfremstilling på formen

$$x = t \cdot B_x$$

$$y = t \cdot B_y + u \cdot C_y$$

$$z = t \cdot B_z + u \cdot C_z + t \cdot u \cdot (D_z - B_z - C_z)$$

- b) Gør rede for at koefficienten $B_x \neq 0$ (Vink: Vis, at i modsat fald er firkanten ikke vindskævt). Benyt dette til at eliminere parameteren t .
- c) Gør rede for at koefficienten $C_y \neq 0$ (Vink: Vis, at i modsat fald er firkanten ikke vindskævt). Benyt dette til at eliminere parameteren u .
- d) Gør rede for at koefficienten $D_z \neq B_z + C_z$. (Vink: Vis, at i modsat fald er firkanten ikke vindskævt).

Benyt dette til at vise at fladen har en ligning på formen $z = a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + d \cdot x + e \cdot y$, hvor $b \neq 0$.

Det afgørende spørgsmål er så, om vi kan frembringe *alle* paraboloider på denne måde. Det kan vi ikke! Det er *meget specielt* at fladen er dobbelt retlinjet og dette forhold gælder *ikke* for en vilkårlig paraboloid. Det minder meget om parabler i 2-dimensioner, hvor parablen jo ikke nødvendigvis har skæring med x-aksen. I 2 dimensioner er det diskriminanten der afgør parablens opførsel. Det samme gælder i 3 dimensioner!

Definition 6:

En paraboloid er grafen for et andengradspolynomium i x og y , dvs. det er en flade med en ligning på formen

$$z = \underbrace{a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2}_{\text{andengradsleddene}} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{\text{førstegradsleddene}} + \underbrace{f}_{\text{konstantleddet}}$$

hvor mindst en af andengradscoeffcienterne er forskellig fra nul.

Ved diskriminanten for paraboloiden forstås tallet:

$$\text{diskriminant} = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Ideen er meget simpel: Vi ønsker at vise at paraboloider kommer i tre forskellige typer:

- Dem, der er dobbelt retlinjede, dvs. gennem hvert punkt på paraboloiden går netop to rette linjer, der begge ligger helt i paraboloiden.
- Dem der er enkelt retlinjede, dvs. gennem hvert punkt på paraboloiden går der netop en ret linje, der ligger helt i paraboloiden.
- Dem der er totalt ikke-retlinjede, dvs. der findes slet ingen rette linjer, der ligger helt i paraboloiden.

For at undersøge om der går en ret linje gennem et grafpunkt, der ligger helt i paraboloiden, bemærker vi at en sådan ret linje ikke kan være lodret, idet der til hver (x, y) -værdi kun hører en z -værdi. En ret linje, der er helt indesluttet i fladen er altså enten vandret eller skrå. Gennem en sådan ret linje går der derfor netop en *lodret plan*, der skærer paraboloiden i den rette linje. Den lodrette plan har en ligning på formen $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$. Hvis den ikke tilfældigvis står vinkelret på x -aksen (med en ligning på formen $x = q$) har den derfor en ligning på formen $y = k \cdot x + q$. Indsættes denne ligning i fladens ligning fås:

$$\begin{aligned} z &= a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot (k \cdot x + q) + c \cdot (k \cdot x + q)^2 + d \cdot x + e \cdot (k \cdot x + q) + f \\ z &= (a + b \cdot k + c \cdot k^2) \cdot x^2 + (b \cdot q + 2 \cdot c \cdot q \cdot k + e \cdot k) \cdot x + (c \cdot q^2 + e \cdot q + f) \end{aligned}$$

Læg mærke til at andengradsleddet kun indeholder k ! For en given værdi af k vil snitkurven derfor enten være en parabel (hvis andengradscoeffcienten er forskellig fra nul: Parablen er glad, hvis andengradscoeffcienten, dvs. hulheden er positiv, og sur, hvis hulheden er negativ) eller en ret linje (hvis andengradscoeffcienten, dvs. hulheden, er lig med 0). Læg også mærke til at hulheden alene afhænger af planens hældning k , dvs. parallelle lodrette planer skærer fladen i parabler med samme hulhed, dvs. de er kongruente, og spreder benene lige meget.

Spørgsmålet om hvilke rette linjer, der findes indesluttet i fladen, hænger altså på løsningen af ligningen

$$a + b \cdot k + c \cdot k^2 = 0.$$

Hvis c er forskellig fra nul, er der tale om en andegradslikning med diskriminanten

$$\text{Diskriminant} = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Men andegradslikningen vil netop have to forskellige løsninger, når *diskriminanten er positiv* svarende til en dobbelt retlinjet flade. I dette tilfælde vil fortegnet for $a + b \cdot k + c \cdot k^2$ skifte fortegn alt eftersom vi er mellem de to løsninger eller udenfor de to løsninger. De lodrette planer skærer derfor i to familier af parabler, der vender hver sin vej. Der er tale om en *hyperbolsk sadelflade*. Vi kan tænke på det på følgende måde: Når den lodrette plan roterer omkring en lodret akse gennem fladepunktet (x_0, y_0) varierer hulheden, dvs. parablen spreder og samler benene, men da hulheden også skifter fortegn, vil parablen to steder passerer gennem en ret linje, hvor den skifter fra at være sur til at være glad.

Tilsvarende vil andengrads ligningen $a + b \cdot k + c \cdot k^2 = 0$ have netop én løsning, hvis *diskriminanten er nul* svarende til en enkelt retlinjet flade. I dette tilfælde vil fortegnet for $a + b \cdot k + c \cdot k^2$ være det samme overalt på fladen uden for den retlinjede løsning. De lodrette planer skærer derfor i en familie af parabler, der alle vender den samme vej. Der er tale om en glad henholdsvis en sur parabolisk cylinder.

Endelig vil der ikke være nogen løsninger, hvis diskriminanten er negativ. Der findes så slet ikke rette linjer i fladen. I dette tilfælde vil fortegnet for $a + b \cdot k + c \cdot k^2$ være det samme overalt på fladen. De lodrette planer skærer derfor i en familie af parabler, der alle vender den samme vej. Der er tale om en glad henholdsvis en sur *elliptisk paraboloid*.

Øvelse 2.19 Tilfældet, hvor $c = 0$.

Hvis c derimod er nul er der tale om en førstegrads ligning $a + b \cdot k = 0$. Den vil så have netop en løsning, hvis b er forskellig fra nul. Det svarer til at diskriminanten er positiv. Men i dette tilfælde vil der også være en ret linje på formen $x = k$. Det kan vi indse ved at indsætte i paraboloidens ligning:

$$z = a \cdot k^2 + b \cdot k \cdot y + d \cdot k + e \cdot y + f$$

$$z = (b \cdot k + e) \cdot y + (a \cdot k^2 + d \cdot k + f)$$

Her er z netop lineær i y , svarende til en ret linje. Alt i alt er der altså to rette linjer, når diskriminanten er positiv. Hvis derimod b er lig med nul, så er der ingen løsninger på formen $y = k \cdot x + q$, men der vil igen være en enkelt løsning på formen $x = k$.

Sætning 9: Struktursætningen for paraboloider

Paraboloiden med ligningen

$$z = \underbrace{a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2}_{\text{andengradsleddene}} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{\text{førstegradsleddene}} + \underbrace{f}_{\text{konstantleddet}} \quad \text{med diskriminant} = b^2 - 4 \cdot a \cdot c,$$

hvor mindst en af koefficienterne til andengradsleddet er forskellig fra nul findes i netop tre typer:

- Hvis diskriminanten $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ er positiv er der tale om en dobbelt retlinjet flade: Den hyperbolske paraboloid. Den har en vandret tangentflade med et stationært punkt som røringspunkt.
- Hvis diskriminanten $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ er nul er der tale om en enkelt retlinjet flade: Den paraboliske cylinder.
- Hvis diskriminanten $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ er negativ er der tale om en totalt ikke-retlinjet flade: Den elliptiske paraboloid. Den har en vandret tangentflade med et toppunkt som røringspunkt.

Vi vil nu være lidt mere forsigtige med at undersøge parablen, der fremkommer som resultat af et *lodret snit* med paraboloiden: Vi sætter ligningen ind for en lodret plan $y = k \cdot x + q$ og finder

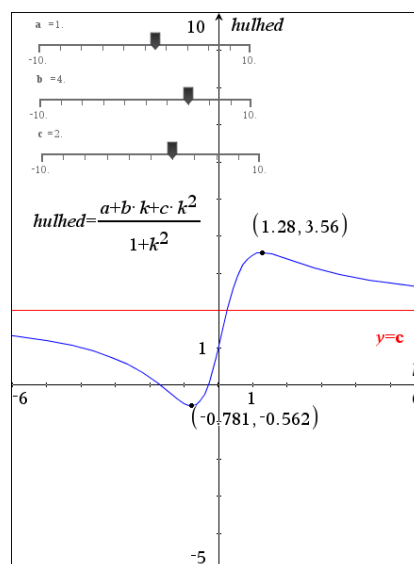
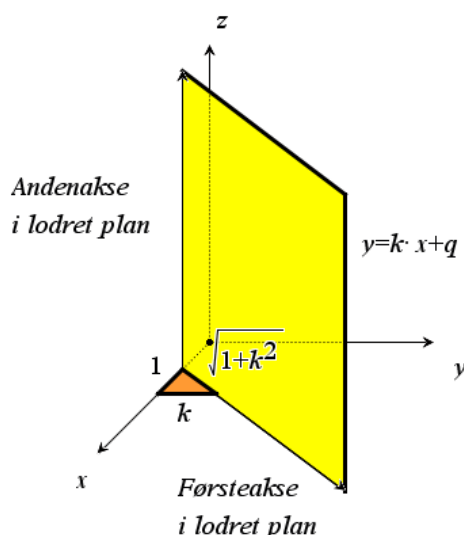
$$z = (a + b \cdot k + c \cdot k^2) \cdot x^2 + (b \cdot q + 2 \cdot q \cdot k + d + e \cdot k) \cdot x + (c \cdot q^2 + e \cdot q + f)$$

Som før bemærket er hulheden uafhængig af q , dvs. to parallelle lodrette planer skærer paraboloiden i parabler med samme hulhed. Men x -koordinaten er ikke en 'ægte' koordinat i den lodrette plan, der jo har en hældning i forhold til x -aksen. I x - y -planen har sporet af den lodrette plan hældningen k og når vi opfatter z som en funktion af x -værdien i denne plan har vi derfor ændret på skalaen. Hver gang vi går 1 hen ad x -aksen går vi k op ad y -aksen, dvs. stykket $\sqrt{1+k^2}$ vandret hen ad den lodrette plan.

Øvelse 2.20

For at få en fornemmelse for hvordan parablen reagerer på ændringer i hulheden indenfor et interval, ser vi en parabel med ligningen $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$

- Indfør skydere for koefficienterne A , B og C . Beskriv hvordan parablen opfører sig, når A varierer i et interval:
 - der indeholder 0.
 - har 0 som det ene endepunkt.
 - der ikke indeholder 0.



Vi skal derfor formindske x -værdien med denne faktor for at finde den reelle hulhed/krumning af parablen, dvs. koefficienten til andengradsleddet i skalatro koordinater i den lodrette plan. Hulheden for snitparablen er derfor givet ved

$$A(k) = \frac{a + b \cdot k + c \cdot k^2}{1 + k^2}$$

Hulheden går derfor mod c i det uendelige ($k = \infty$) og der er derfor tale om en *begrænset funktion*. En typisk graf for hulheden ser således ud som vist foroven. Den skærer k -aksen i et eller to punkter afhængigt af værdien af diskriminanten, men vi kan også finde de maksimale og minimale værdier for parablernes hulhed ved differentiation:

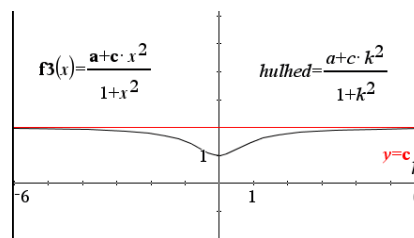
$$\left(\frac{a + b \cdot k + c \cdot k^2}{1 + k^2} \right)' = \frac{b + 2 \cdot (c - a) \cdot k - b \cdot k^2}{(1 + k^2)^2}$$

Diskriminanten for tælleren er givet ved

$$4 \cdot (c - a)^2 + 4 \cdot b^2,$$

dvs. den er altid positiv! I almindelighed er der derfor to k -værdier, hvor hulheden er ekstrem. Men med to ekstremer og en vandret asymptote må de to ekstremumpunkter nødvendigvis ligge på hver sin side af asymptoten. Det generelle tilfælde ligner altså grafen for oven.

Det eneste smuthul er når der ikke er tale om et andengradspolynomium, fordi $b = 0$. Den typiske graf ser da således ud. Der er altså netop et ekstremumpunkt, med værdien a som ligger i $k = 0$ (dvs. den lodrette plan er parallel med x -aksen), mens den asymptotiske værdi c så fungerer som den anden ekstremumsværdi som så ligger i $k = \infty$ (svarende til at den lodrette plan er parallel med y -aksen).



Det interessante er nu, som du måske har observeret ved at lege med skyderne, at produktet af de to k -værdier altid er -1 ! Det skyldes at produktet ifølge sætningen om røddernes sum og produkt i et andengradspolynomium, netop er givet ved forholdet mellem konstantleddet og andengrads-koefficienten.

Sætning 10: De tilhørende lodrette planer står altså vinkelret på hinanden. De to ekstremale parabler, den med størst hulhed og den med mindst hulhed, står altså vinkelret på hinanden.

Vi kan nu forenkle analysen af paraboloiden betydeligt ved at lægge koordinatsystemet, så x - og y -aksen peger langs de to retninger, hvor hulheden er ekstremal. I dette koordinatsystem er koefficienten til det

blandede led, dvs. b , altså nul. Det medfører at diskriminanten er givet ved produktet af de to øvrige koefficienter a og b :

Sætning 11: Standardligning for en paraboloid:

Vælges z -aksen parallel med paraboloidens akse og x -, y -akserne parallelle med parablerne med de ekstreme huldeder, dvs. den tykkeste parabel og den tyndeste parabel i de lodrette snit, får paraboloiden en standardligning på formen:

$$z = \underbrace{a \cdot x^2 + c \cdot y^2}_{\text{andengradsleddene}} + \underbrace{d \cdot x + e \cdot y}_{\text{førstegradsleddene}} + \underbrace{f}_{\text{konstantleddet}} \quad \text{diskriminant} = -4 \cdot a \cdot c$$

Hvor det blandede led mangler.

Paraboloiden er da en hyperbolsk parabolide, netop når a og c har modsat fortegn, en parabolisk cylinder, netop når en af andengrads-koefficienterne a og c er nul og endelig en elliptisk paraboloid, netop når koefficienterne til andengradsleddene, a og c , har samme fortegn.

Ved hjælp af passende parallelforskydninger kan standardligningen forenkles yderligere. Vi kan nemlig samle leddene ved kvadratkomplettering:

Sætning 12: Hvis begge koefficienterne til andengradsleddene a og c er forskellige fra nul, dvs. diskriminanten ikke er nul, kan standardligningen forenkles til

$$z = a \cdot (x - x_{Top})^2 + c \cdot (y - y_{Top})^2 + z_{Top}$$

Paraboloiden har da et toppunkt med koordinaterne $(x_{Top}, y_{Top}, z_{Top})$. Hvis a og c har samme fortegn er det klart et ekstremumspunkt med ekstremumsværdien z_{Top} . Hvis de har modsat fortegn er det et sadelpunkt, dvs. et maksimumspunkt langs den ene akse og et minimumspunkt langs den anden.

Ved parallelforskydning kan vi yderligere opnå at Origo falder sammen med toppunktet og standardligningen forenkles da til:

$$z = a \cdot x^2 + c \cdot y^2$$

Øvelse 2.21

- Opret et firedelt vindue, hvor de tre af vinduerne er 3d-graf-værksteder, mens det sidste (nederst til højre) er et standard geometri-vindue. Opret skydere for a , b , x_0 , y_0 og z_0 i standard geometri-vinduet.
- Tegn graferne for $z = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$ (i øverste venstre vindue), $z = a \cdot x^2$ (i nederste venstre vindue), $z = b \cdot y^2$ (i øverste højre vindue). Hvad er karakteristisk for paraboloiden når a og b begge er positive? De begge er negative? De har modsat fortegn? Hvad bliver niveaukurverne i de tre tilfælde (dvs. skæringen med de vandrette planer $z = z_0$)?
- Tilføj parameterkurver for parablerne $z = a \cdot x^2, y = y_0$ (dvs. $x = t, y = y_0, z = a \cdot t^2$) henholdsvis $z = b \cdot y^2, x = x_0$ (dvs. $x = x_0, y = t, z = b \cdot t^2$). Gør rede for at paraboloiden er en *forskydningsflade*, dvs. den fremkommer ved at forskyde en kurve, i dette tilfælde fx $z = a \cdot x^2, y = 0$ langs en anden kurve, i dette tilfælde fx $z = b \cdot y^2, x = 0$.

Hvis omvendt en af koefficienterne til andengradsleddene er nul – vi kan gerne antage, det er c – kan vi kun gennemføre en delvis kvadratkomplettering $z = a \cdot (x - x_0)^2 + e \cdot y + z_0$. Ved en passende parallelforskydning kan vi flytte Origo over i punktet $(x_0, 0, z_0)$, hvorved standardligningen forenkles til $z = a \cdot x^2 + e \cdot y$.

Øvelse 2.22

- a) Opret et firedelt vindue, hvor de tre af vinduerne er 3d-graf-værksteder, mens det sidste (nederst til højre) er et standard geometri-vindue. Opret skydere for a , e , x_0 , y_0 og z_0 i standard geometri-vinduet.
- b) Tegn graferne for $z = a \cdot x^2 + e \cdot y$ (i øverste venstre vindue), $z = a \cdot x^2$ (i nederste venstre vindue), $z = e \cdot y$ (i øverste højre vindue). Hvad er karakteristisk for paraboloiden når a og e begge er positive? De begge er negative? De har modsat fortegn? Hvad bliver niveaukurverne i de tre tilfælde (dvs. skæringen med de vandrette planer $z = z_0$)?
- c) Tilføj parameterkurver for parablerne $z = a \cdot x^2, y = y_0$ (dvs. $x = t, y = y_0, z = a \cdot t^2$) henholdsvis $z = e \cdot y, x = x_0$ (dvs. $x = x_0, y = t, z = e \cdot t$). Gør rede for at den paraboliske cylinder er en *forskydningsflade*, dvs. den fremkommer ved at forskyde en kurve, i dette tilfælde fx $z = a \cdot x^2, y = 0$ langs en anden kurve, i dette tilfælde fx $z = e \cdot y, x = 0$.

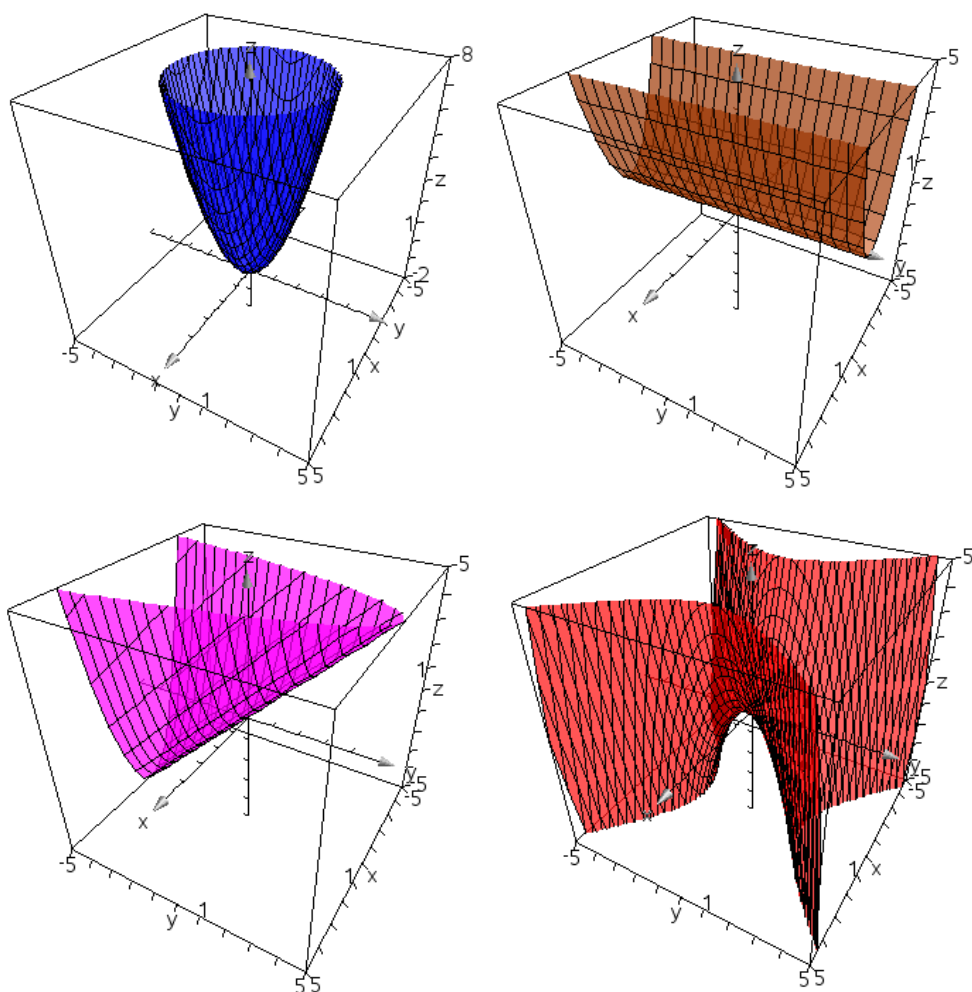
Ved passende skaleringer af akserne kan ligningerne forenkles yderligere, så alle koefficienter er ± 1 . Der bliver da netop fire prototyper på paraboloider:

$$z = x^2 + y^2 \quad (\text{omdrejningsparaboloiden})$$

$$z = x^2 \quad (\text{den vandrette paraboliske cylinder})$$

$$z = x^2 + y \quad (\text{den skrå paraboliske cylinder})$$

$$z = x^2 - y^2 \quad (\text{den ligesidede hyperbolske parabolide})$$

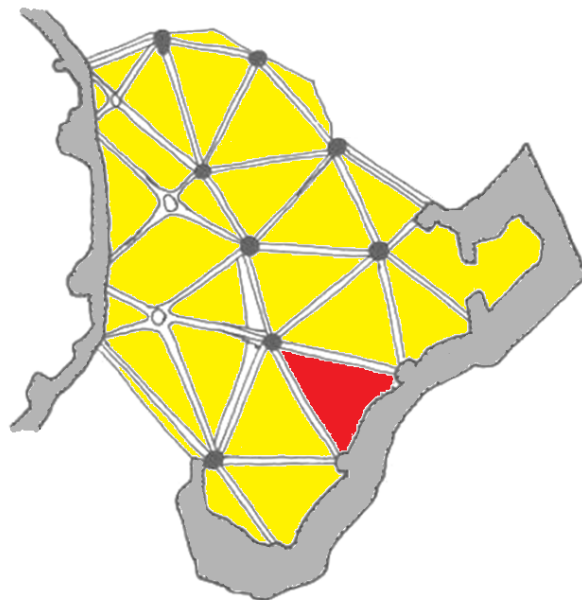


2.4 Gaudis hvælvinger og kupler

Kirken i Colonial Güell var Gaudis øvebane for det store katedralbyggeri Sagrada Familia i Barcelona. Han nåede dog kun at gøre krypten færdig inden bygherren og mæcenen Güell døde og sønnen satte en stopper for byggeriet. I nyere tid er interessen for den ufuldendte kirke dog vokset betydeligt og der findes i dag færdige modeller af kirken baseret på Gaudis foreløbige skitser:



Her skal vi især interessere os for indgangspartiet, den såkaldte portico. Allerede ved indgangsdøren har Gaudi sat sin signatur, treenighedssymbolet, i form af de to lyse vinger, der flankerer døren. De er netop formede som saddelflader. Men ellers er det hvælvingerne vi vil fokusere på. De er inddelt i felter, der hver for sig er muret op med kunstfærdig keramik:



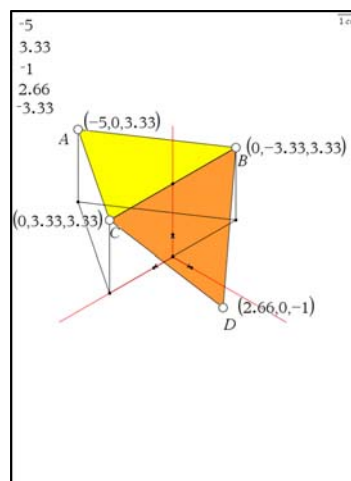
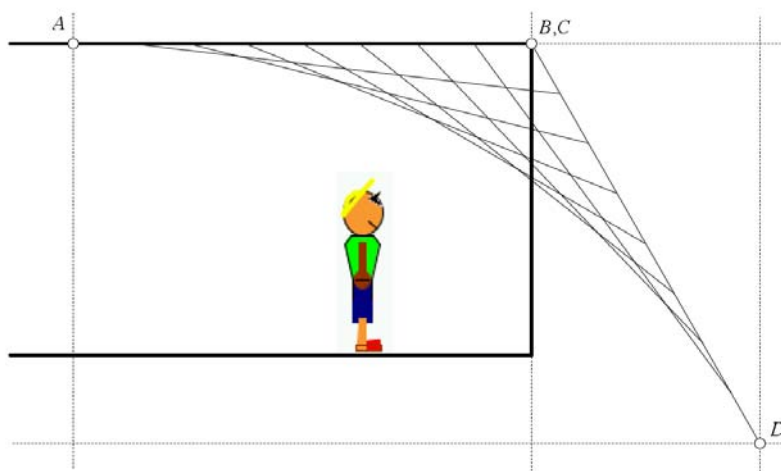
Hvert af disse felter er udformet som en hyperbolsk paraboloid, heraf mange med kors, der netop følger de retlinjede frembringere, langs diagonalerne i keramikken, mens hovedlinjerne altså følger parablerne i hvælvet:



Læg også mærke til de mange folder langs kanterne af felterne. Der er også tydeligt udformede som hyperbolske paraboloider:



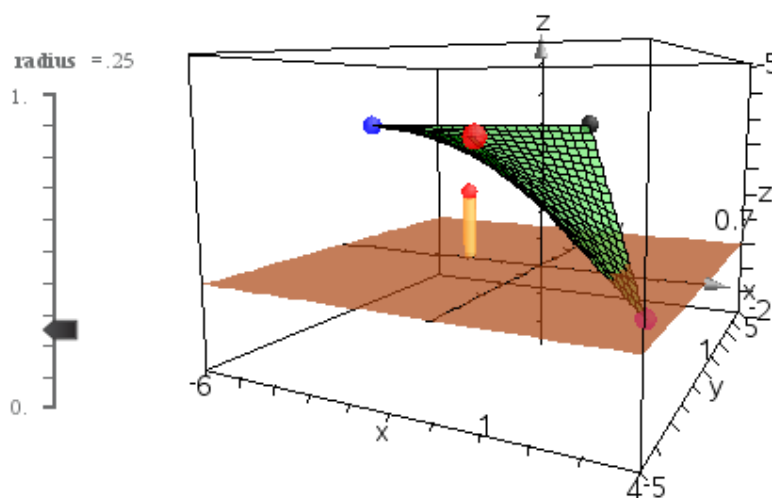
Her vil vi nu se nærmere på et enkelt felt markeret med rødt i oversigtsfiguren. En opmåling af feltet afslører at den er opbygget ud fra en vindskef firkant, hvor den øverste trekant ABC ligger vandret i 3.33 meters højde over gulvet og udspænder loftet, mens den skrå fiktive trekant BCD ender 1 meter under gulvet under gulvhøjde i afstanden 2.66 meter fra væggen.



Det er modellen for denne hvælving vi nu vil arbejde på:

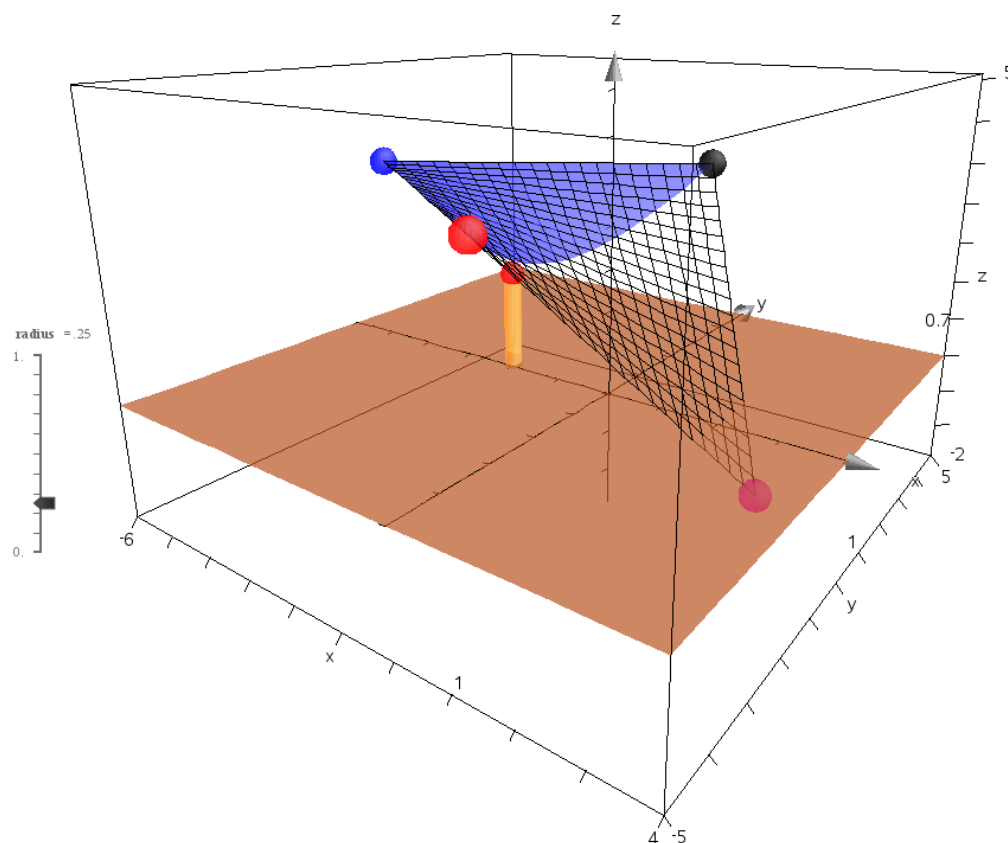
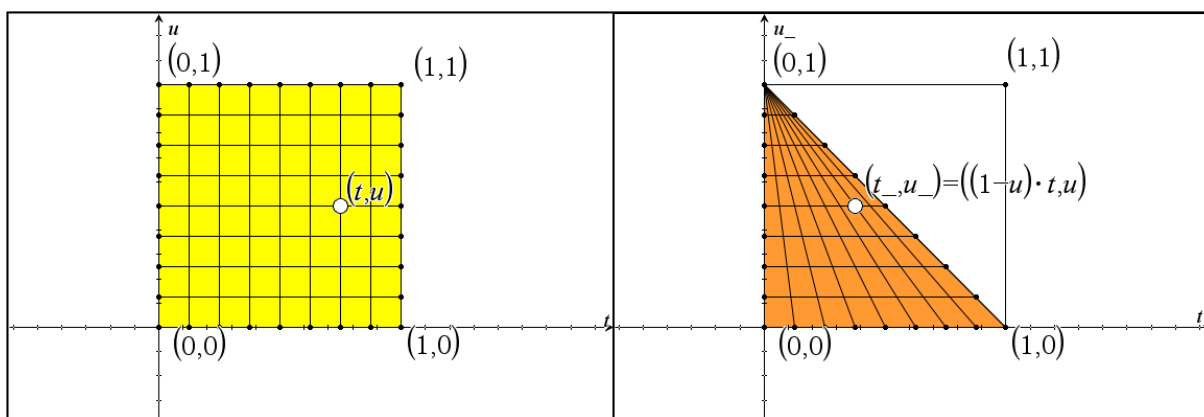
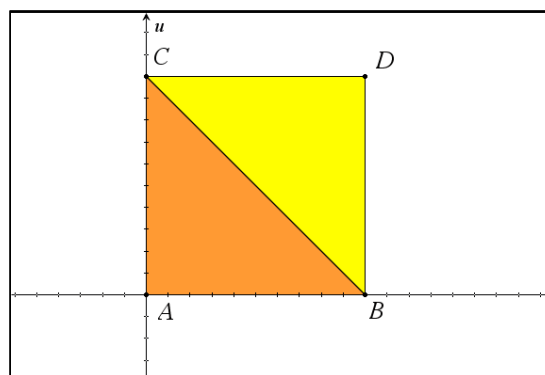
Øvelse 2.23:

- Vælg vinduesgrænserne $-6 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$, $-2 \leq z \leq 5$ og afsæt gulvplanen $z = 0$.
- Indfør hjørnerne $A(-5, 0, 3.33)$, $B(0, -3.33, 3.33)$, $C(0, 3.33, 3.33)$ og $D(2.66, 0, -1)$ og afsæt punkterne på sædvanlig vis:
 $\text{kugle} := \{\cos(t) \cdot \sin(u), \sin(t) \cdot \sin(u), \cos(u)\}$
 $\text{A} := \{-5, 0, 3.33\}, \dots$
 $\text{ptA} := \text{A} + \text{radius} \cdot \text{kugle}$
 hvor radius er en passende skydervariabel.
- Afsæt den hyperbolske paraboloiden
 $\text{hypar} := (1-u) \cdot ((1-t) \cdot \text{A} + t \cdot \text{B}) + u \cdot ((1-t) \cdot \text{C} + t \cdot \text{D}), 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 1$
- Afsæt en figur svarende til en primitiv udgave af manden, fx i form af en cylinder som krop og en kugle som hoved ☺



Læg mærke til hvordan loftshvælvingen i modsætning til de traditionelle hvælvinger, buer nedad. Sådanne konvekse hvælvinger er et af hovedkendetegnene ved brugen af de hyperbolske paraboloider.

For at færdiggøre modellen skal vi nu have afbrudt loftshvælvingen, når den når væggen, dvs. $x=0$. Ser vi på parameterområdet skal vi altså kun have tegnet fladen, når vi befinder os under diagonalen i enhedskvadratet, som vist på figuren. Vi må da gå en lille omvej, idet vi først afbilder enhedskvadratet på trekanten under diagonalen, og derefter afbilder trekanten på den hyperbolske paraboloid. Det er ikke så slemt, hvis gitterlinjerne ikke behøver være frembringere. I så fald skal vi blot trykke t -koordinaten sammen med faktoren $(1-u)$ svarende til afbildningen:



Øvelse 2.24:

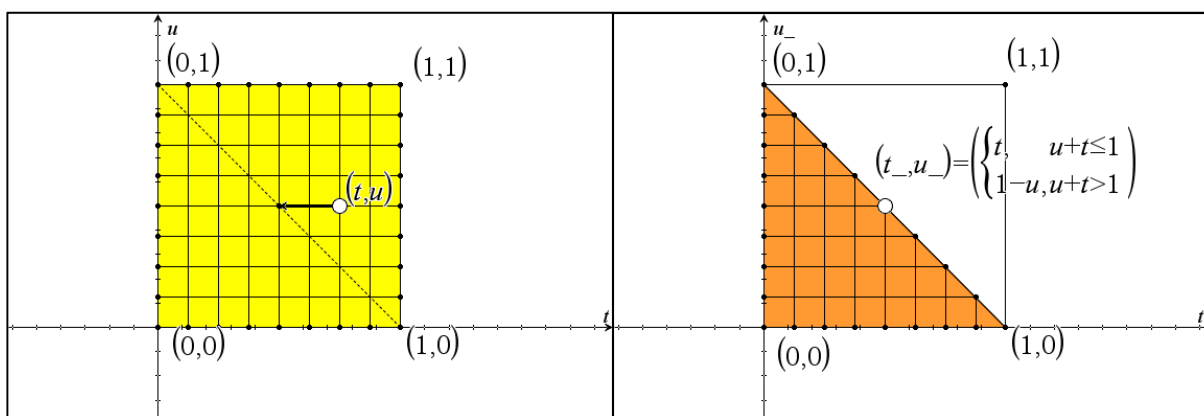
- Skift nu attributter på taghvælvingen **hypar**, så vi kun ser gitteret.
- Halvér derefter domænet for den hyperbolske paraboloid ved hjælp af kommandoerne:

$$\text{hypar_} := \text{hypar} | t = t_ \text{ and } u = u_$$

$$\text{halv} := \text{hypar_} | t_ = (1-t) \cdot u \text{ and } u_ = u$$

- Skift til sidst attributter på den halve taghvælving, så vi kun ser fladen. Du skulle nu gerne have frembragt en taghvælving for det røde felt!

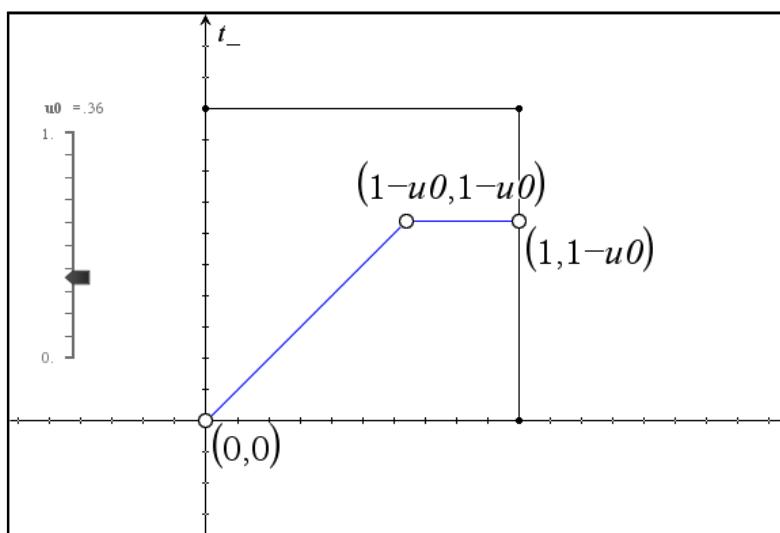
Det kan synes lidt ærgerligt, at vi ikke kan få de rigtige gitterlinjer frem på den måde. Hvis vi arbejder lidt mere med parametriseringen kan vi reparere på det også. Teknikken er ikke helt simpel men er afgørende for videregående anvendelser af det 3-dimensionelle grafrum. Vi starter med at bemærke at vi skal overføre enhedskvadratet i trekanten under diagonalen på en sådan måde at så længe vi er inde i trekanten under diagonalen afbildes punktet på sig selv. Men når vi er over diagonalen afbildes det på diagonalen, fx som vist via en vandret forskydning ind på diagonalen:



Vi ændrer altså ikke u -koordinaten! Til gengæld skal vi bruge den stykvis lineære funktion:

$$t_- = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1-u_0 \\ 1-u_0, & 1-u_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Den har grafen



Desværre kan vi ikke anvende stykvis lineære funktioner i 3d-grafer ☹. Vi må derfor omskrive dem til almindelige funktioner. Vi udnytter da i stedet at en stykvis lineær funktion har absolutværdien som prototype. Den ovenstående stykvis lineære funktion med knæpunkterne $t=0, t=1-u_0, t=1$ kan derfor skrives på formen:

$$t_- = a \cdot |t| + b \cdot |t - (1 - u_0)| + c \cdot |t - 1|$$

Vi skal bare finde koefficienterne a , b og c . Men det kan vi jo trygt overlade til TI-Nspire CAS:

$$\begin{aligned} \text{eq} &:= t_- = a \cdot |t| + b \cdot |t - (1 - u)| + c \cdot |t - 1| \quad \rightarrow \quad t_- = b \cdot |t + u - 1| + c \cdot |t - 1| + a \cdot |t| \\ \text{eq1} &:= \text{eq} |_{t=0} \text{ and } t_- = 0 \text{ and } 0 \leq u \leq 1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ and } 0 = -b \cdot u + b + c \\ \text{eq2} &:= \text{eq} |_{t=1-u} \text{ and } t_- = 1-u \text{ and } 0 \leq u \leq 1 \quad \rightarrow \quad 1-u = (c-a) \cdot u + a \text{ and } 0 \leq u \leq 1 \\ \text{eq3} &:= \text{eq} |_{t=1} \text{ and } t_- = 1-u \text{ and } 0 \leq u \leq 1 \quad \rightarrow \quad 1-u = b \cdot u + a \text{ and } 0 \leq u \leq 1 \\ \text{solve} &\left(\begin{cases} 0 = -b \cdot u + b + c \\ 1-u = (c-a) \cdot u + a \\ 1-u = b \cdot u + a \end{cases}, a, b, c \right) \quad \rightarrow \quad a = \frac{-(u-2)}{2} \text{ and } b = \frac{-1}{2} \text{ and } c = \frac{-(u-1)}{2} \\ \text{eq} &|_{a = \frac{-(u-2)}{2} \text{ and } b = \frac{-1}{2} \text{ and } c = \frac{-(u-1)}{2}} \quad \rightarrow \quad t_- = \frac{-|t+u-1|}{2} - \frac{|t-1| \cdot (u-1)}{2} - \frac{|t| \cdot (u-2)}{2} \end{aligned}$$

Det ser lidt indviklet ud, men det tillader os nu at finde den søgte parametrisering af den hyperbolske paraboloid. Vi fjerner først gitterlinjerne fra den oprindelige hyperbolske paraboloid ved at sætte såvel t -inddelingerne som u -inddelingerne til 2, hvorved vi kun får tegnet omridset af den hyperbolske paraboloid, dvs. den vindskæve trekant. Derefter tilføjes den halve hvælving, men denne gang via den nye parametrisering. Det ser selvfølgelig lidt mere snakset ud, men resultatet er netop en Gaudi-hvælving forsynet med de retlinjede frembringere:

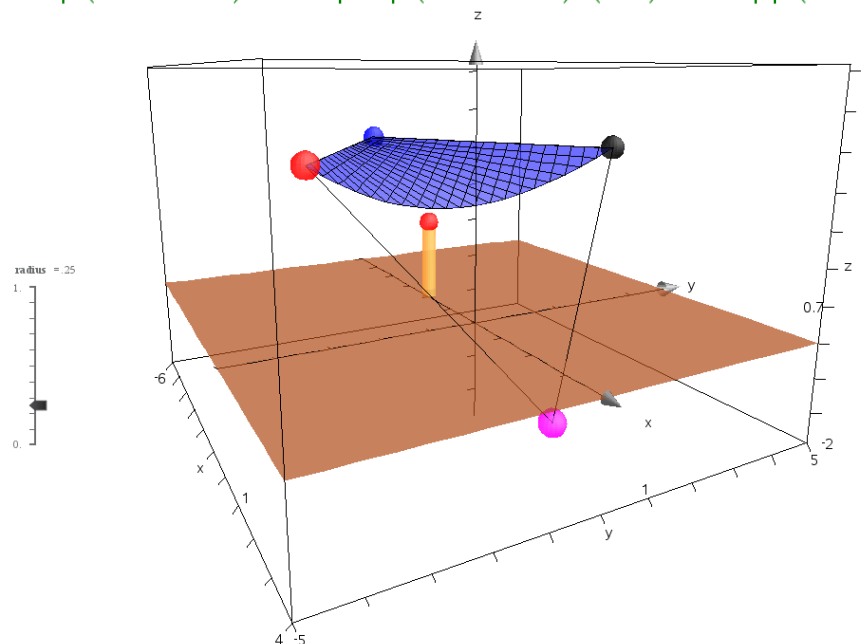
$$\text{hypar} := (1-u) \cdot ((1-t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}) + u \cdot ((1-t) \cdot \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d})$$

$$\triangleright \{t \cdot (5 - 2.34 \cdot u) + 5 \cdot (u-1), 3.33 \cdot u - 3.33 \cdot t, 3.33 - 4.33 \cdot t \cdot u\}$$

$$\text{hypar}_- := \text{hypar} |_{t=t_- \text{ and } u=u_-}$$

$$\text{halv} := \text{hypar}_- |_{t_- = \frac{|t+u-1|}{2} - \frac{|t-1| \cdot (u-1)}{2} - \frac{|t| \cdot (u-2)}{2} \text{ and } u_- = u}$$

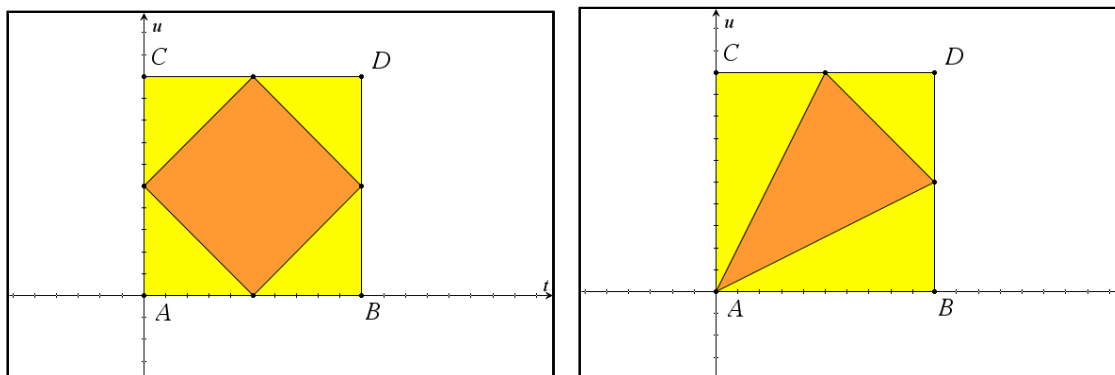
$$\triangleright \{1.17 \cdot |t+u-1| \cdot (u-2.13675) + 1.17 \cdot |t-1| \cdot (u-2.13675) \cdot (u-1) + 1.17 \cdot |t| \cdot (u-2.13675) \cdot (u-2) + 5 \cdot t\}$$



Øvelse 2.25:

- a) Gennemfør nu selv den ovenstående konstruktion og roter figuren, så du kan få en fornemmelse af den rumlige struktur, herunder at gitterlinjerne vittterligt er rette linjer!

Vi er nu kommet ret så langt i vores analyse af de felter i porticoen, der er dækket af hyperbolske paraboloider som taghvælvinger. Som vi har set halverer Gaudi nogle af de vindskæve firkanter. Han benytter sig også af to andre typer beskæringer, der i parameterdomænet ser således ud:



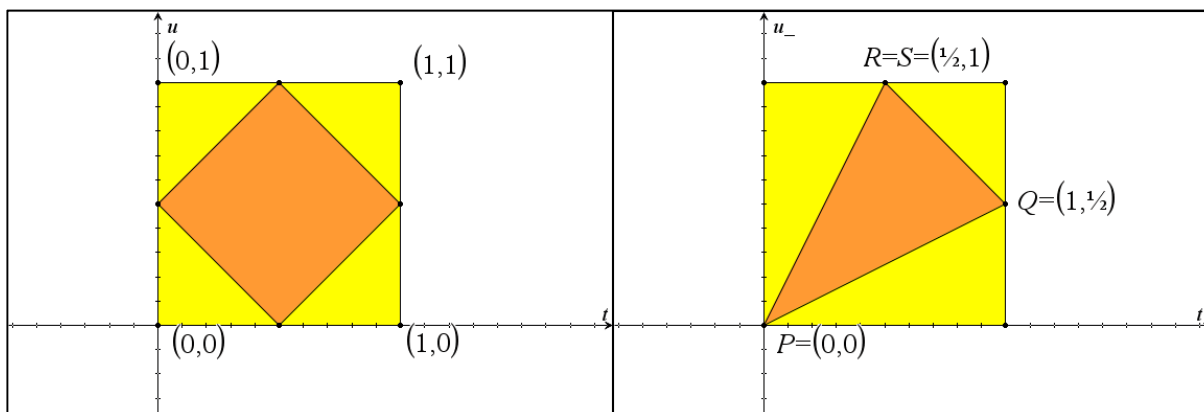
Den første er firkantagtig, men udspændt af det andet system af frembringere, dvs. af hovedparabler, der vender hver sin vej. Den afgrænses altså af parabelbuer, i stedet for af rette linjer. Vi har allerede diskuteret denne mulighed i oversigten side 63.

Den anden er trekantagtig. Den er mere tricket: Linjerne der forbinder A med midtpunkterne for BD og CD overføres i parabelbuer, men ikke i hovedparabler, dvs. de er ikke frembringere. Kun linjen, der forbinder midtpunkterne overføres i en hovedparabel.

Vi ser nu nærmere på den sidste. Da den *ikke* benytter sig af frembringere i kanterne vil vi blot tegne den uden gitter oven på det store gitter i den vindskæve firkant. Det afgørende er da at vi kan afbilde enhedskvadratet på trekanten i parameterdomænet. Men hertil bruger vi blot en afbildning af formen

$$(t, u) = (1-u) \cdot ((1-t) \cdot P + t \cdot Q) + u \cdot ((1-t) \cdot R + t \cdot S)$$

hvor P, Q, R, S er billederne af hjørnerne i enhedskvadratet.



Øvelse 2.26:

- a) Gør rede for at afbildningen af enhedskvadratet på trekanten er givet ved

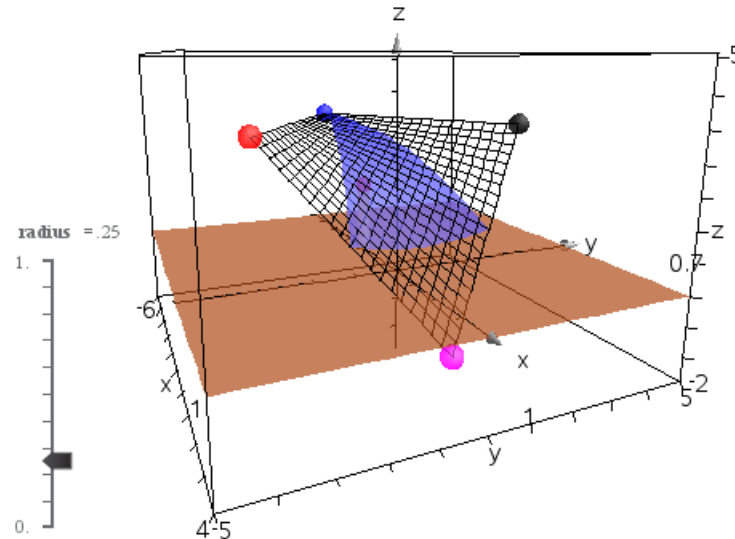
$$(t_ , u_) = (t - u \cdot t + \frac{1}{2} \cdot u, \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot u \cdot t + u)$$

- b) Konstruer nu afbildningen af snittet i den vindskæve firkant:

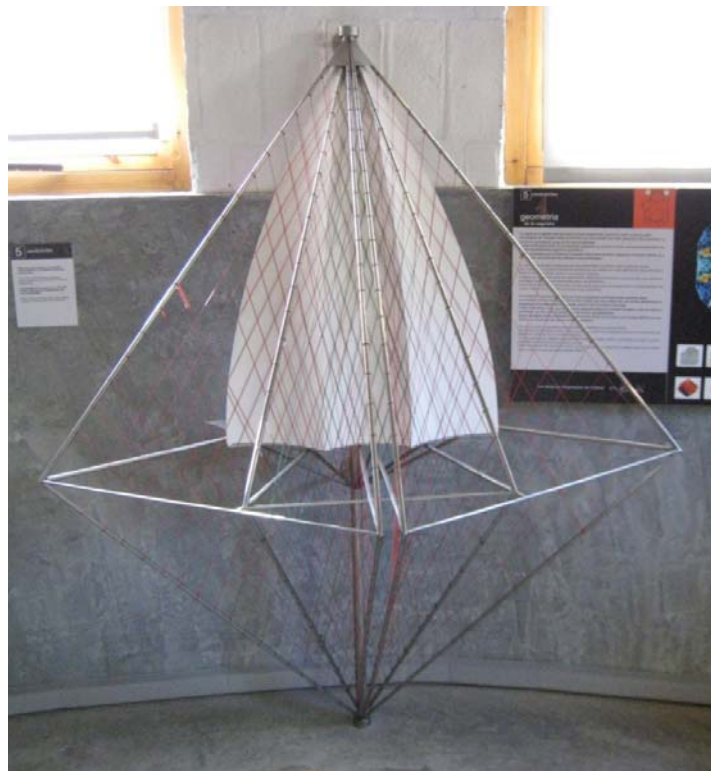
$$\text{hypar} := (1-u) \cdot ((1-t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}) + u \cdot ((1-t) \cdot \mathbf{c} + t \cdot \mathbf{d})$$

$$\text{hypar_} := \text{hypar} | t=t_ \text{ and } u=u_$$

$$\text{snit} := \text{hypar_} | t = t - u \cdot \frac{u}{2} + \frac{u}{2} \text{ and } u = \frac{t}{2} - \frac{u \cdot t}{2} + u$$



Sådanne udsnit var ikke den eneste komplikation, som Gaudi kunne finde på! Ser vi fx igen på kuplen i sakristiet i Sagrada Familia, så viser modellen tydeligt at han lader de vindskæve firkanter, der udspænder siderne i kuplen, overlappe hinanden, hvorfor de hyperbolske paraboloider ikke bare støder op til hinanden langs en frembringer, hvad der ville være ret simpelt at modellere, men de skærer faktisk hinanden i en kompliceret kurve. Så der er udfordringer nok i Gaudis geometri og det moderne katedralbyggeri er derfor fuldstændigt afhængigt af stærke CAD-computerprogrammer, hvor man kan arbejde med parametriske design af Gaudis sammenstykkede flader. Uden omfattende computerstøtte ville man ikke i dag kunne styre katedralbyggeriet sikkert igennem Gaudis intuitive geometriske visioner.



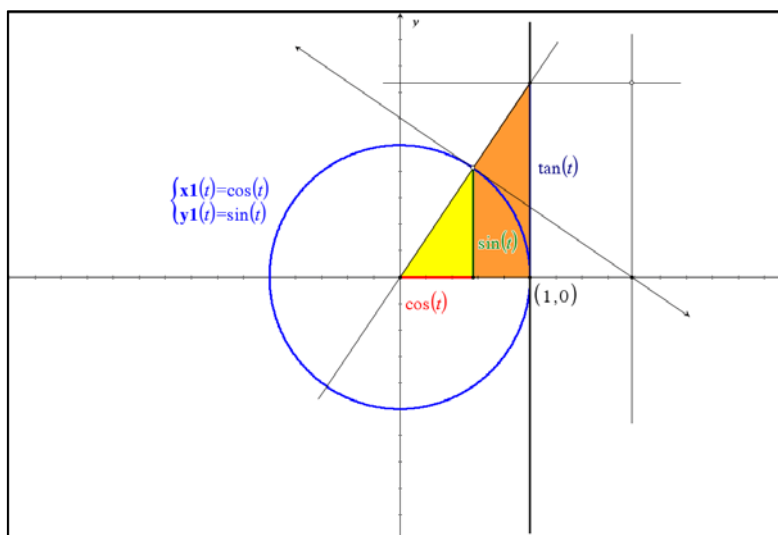
3. Den guddommelige flade II: Den elliptiske hyperboloide

3.1 Parameterfremstillinger for cirkler og ligesidede hyperbler

Det er ligesom med solen og månen: Solen, dvs. cirklen, er løbet med hele opmærksomheden! Hvis vi skal parametrisere en enhedscirkel er det naturligt at gribe til trigonometrien. Vi indlægger et koordinatsystem med begyndelsespunkt i cirkelns centrum. Hvis cirkelpunktet har retningsvinklen t er punktets koordinater givet ved $(\cos(t), \sin(t))$. Parameterfremstillingen af en cirkel er derfor givet ved

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t)$$

Her skal parameteren t løbe fra 0 til 2π . Parameterfremstillingen er sat op, så parameteren t netop svarer til en retningsvinkel. Det er da også standard for parameterkurverne i TI-Nspire CAS, der er skræddersyede til trigonometriske funktioner. Det kan derimod betale sig at sætte parametertrinnet ned til fx 0.031 (du får kun lov til at lave 200 parameterspring!). Det sikrer både at cirklen bliver rimeligt pænt rund og at den lukker pænt. Som ved andre parameterkurver kan vi tegne en tangent til cirkelpunktet, ved hjælp af tangentværktøjet fra Punkter og Linjer-menuen under Geometri-menuen. Men ellers kører konstruktionen af den karakteristiske trekant med cosinus og sinus ved elementære geometriske konstruktioner:



Den karakteristiske gule trekant har hypotenusen 1 og derfor giver Pythagoras umiddelbart den trigonometriske identitet

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

Fra ensvinklede trekanter fås tilsvarende identiteten

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

Disse to identiteter vil vi uden videre trække på i det følgende ☺.

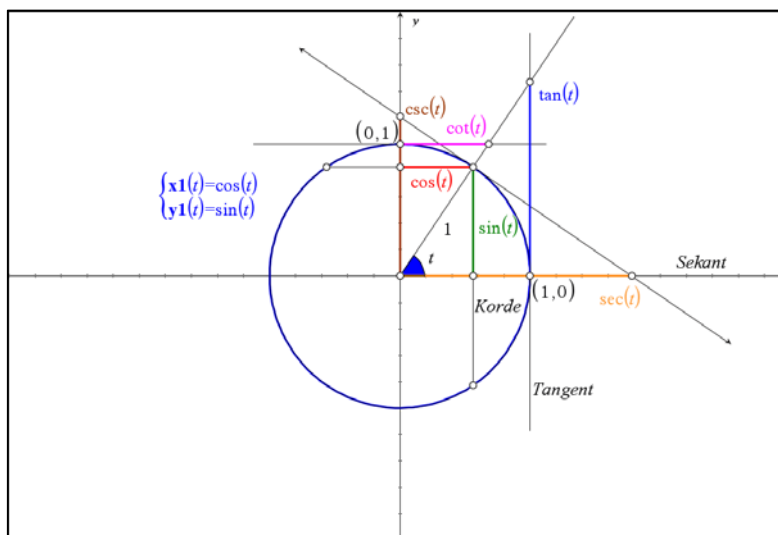
Øvelse 3.1:

- a) Vis at cirkeltangenten skærer x -aksen i $x = \frac{1}{\cos(t)}$ og y -aksen i $y = \frac{1}{\sin(t)}$.

Bemærkning: Før i tiden fik disse to trigonometriske funktioner særskilte navne og blev kaldt sekans- og cosekans-funktionerne $\sec(t)$ henholdsvis $\csc(t)$. TI-Nspire CAS skriver dem automatisk om til de klassiske trigonometriske funktioner. Prøv selv i et noteværksted!

Der findes altså flere end de tre trigonometriske funktioner, $\sin$, $\cos$ og $\tan$ som vi normalt bruger! Der findes nemlig også de tre tilsvarende reciprokfunktioner. De trigonometriske funktioner er alle knyttet til

cirkelns linjer: *korder* (sin og cos), *tangenter* (tan og cot, dvs. cotangens) samt *sekanter* (sekans og cosekans). De to første aflæses inden i cirklen, de fire sidste uden for cirklen, fx som vist på det følgende diagram, hvor vi har lagt vægt på at aflæse dem som vandrette og lodrette stykker (men de kunne også være fundet på cirkelradien og cirkeltangenten: prøv selv!):

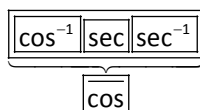


Det vrirler med retvinklede trekanter på figuren, så der gælder allehånde Pythagoræiske sammenhænge:

Øvelse 3.2:

- a) Vis at der må gælde $\sec(t)^2 = 1 + \tan(t)^2$
 $\csc(t)^2 = 1 + \cot(t)^2$

Bemærkning: Hvis du har fx en ipad, så har du adgang til det særlige TI-Nspire CAS tastatur. Her har de trigonometriske taster en særlig udformning. Fx er der en bjælke øverst på cos-tasten, der giver adgang til de trigonometriske funktioner beslægtet med cosinus:



Men det betyder altså blot at cosinus-funktionen hører sammen med den omvendte cosinus, den reciprokke cosinus og den omvendte reciprokke cosinus! Det fører til en vigtig restriktion på notationen:

Når du anvender notationen $\square^{-1}$ på en trigonometrisk funktion er det afgørende om den kommer før eller efter argumentet, idet der jo gælder

$$\cos^{-1}(1/2) \neq \frac{\pi}{3}$$

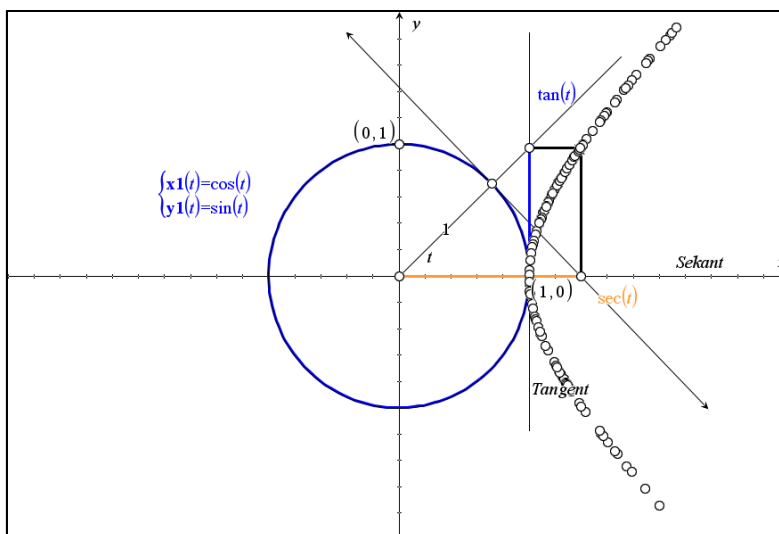
$$\cos(\pi/3)^{-1} \neq 2$$

Det første symbol står for den omvendte cosinus og her skal superscriptet -1 skrives som et enkelt sammenhængende tegn. Den næste symbol står for den reciprokke cosinus og her skal superscriptet skrives som to adskilte tegn i en potens.

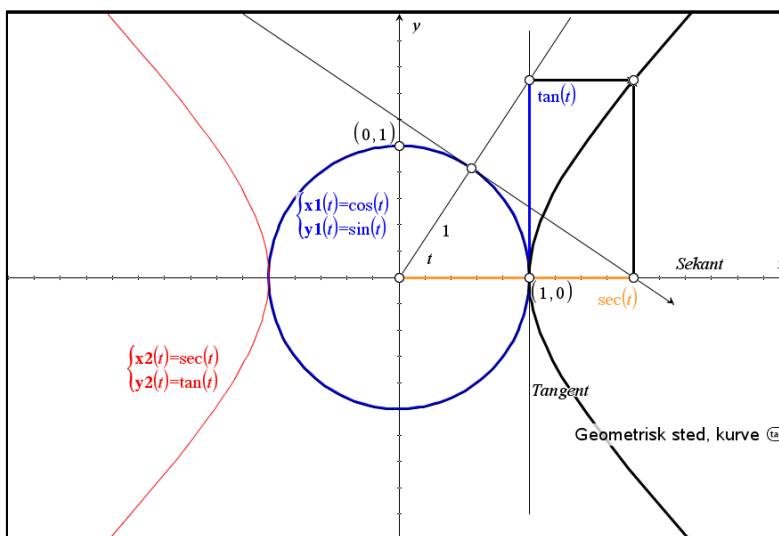
Til overflod har matematikerne også indført særskilte betegnelser for de omvendte trigonometriske funktioner, idet fx den omvendte cosinus også kan skrives som arccos. Heldigvis kender TI-Nspire CAS alle disse forskellige betegnelser, men du kan altså møde dem i andre fremstillinger ☺.

Vi introducerer nu **den ligesidede hyperbel** på følgende måde: Vi går lodret op i cirkeltangentens skæringspunkt med x-aksen og vandret hen fra tangens-punktet, dvs. vi fanger punktet med koordinaterne

$(\sec(t), \tan(t)) = \left(\frac{1}{\cos(t)}, \tan(t) \right)$. Sporer vi dette punkt kan vi se den kurve, der frembringes:



Hvis vi vil frembringe kurven mere permanent, skal vi have konverteret den til et geometrisk sted eller tegnet som en parameterkurve!



Øvelse 3.3:

- Tegn enhedscirklen som en geometrisk cirkel og omdefinér røringsspunktet til at ligge på den geometriske cirkel. Du kan nu konstruere kurven som et geometrisk sted drevet af cirkelpunktet. For at få begge grenene med skal du dog definere vinklen som en ret linje gennem Origo og ikke som her en halvlinje ☺
- Tegn parameterkurven med parameterfremstillingen idet du igen sætter parametertilvæksten til 0.031: $x = \sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$, $y = \tan(t)$
- Gør rede for at det geometriske sted/parameterkurven får ligningen $x^2 - y^2 = 1$

Bemærkning: Parameterfunktionerne er ikke definerede i $t = \pm \frac{\pi}{2}$. I disse parameterværdier ryger

parameterkurven ud til uendelig. Afhængigt af hvordan du vælger koordinatrummet og parametertilvæksten kan du risikere at TI-Nspire CAS overser diskontinuiteterne. I så fald får du tegnet asymptoterne $y = \pm x$ med ind på din figur.

Den ligesidede hyperbel med ligningen $x^2 - y^2 = 1$ er modstykket til enhedscirklen $x^2 + y^2 = 1$. De går begge gennem enhedspunktet (1,0) og ligger på hver sin side af den fælles lodrette tangent $x = 1$. I en vis forstand kan man opfatte de to kurver som en form for spejlinger af hinanden i den lodrette fællestangent. Den højre cirkelbue afbildes da i den højre hyperbelgren og den venstre cirkelbue i den venstre hyperbelgren. Nordpolen (0,1) og sydpolen (0,-1) afbildes tilsvarende i de uendeligt fjerne asymptotepunkter. Men der er naturligvis ikke tale om en traditionel spejling. Det er mere et magisk 'spejl', der forbinder de to kurver, som hver for sig kan bruges som udgangspunkt for at fremstille en komplet trigonometri: Den antikke cirkeltrigonometri og den moderne hyperbolske trigonometri. De spiller også hver for sig hovedrollen i en komplet geometri: Cirklen har hovedrollen som den fuldkomne figur i den euklidiske geometri, mens den ligesidede hyperbel spiller den tilsvarende rolle i den såkaldte Minkowski-geometri. Men her har vi altså introduceret den ligesidede hyperbel indenfor rammerne af den Euklidiske geometri.

På præcis samme måde som du har brugt den reciprokke cosinus til at definere en ligesidet hyperbel kan du bruge den reciprokke sinus til at definere en ligesidet hyperbel:

Øvelse 3.4:

- a) Tegn enhedscirklen som en geometrisk cirkel. Vi går vandret ud fra cirkeltangentens skæringspunkt med y-aksen og lodret op fra cotangens-punktet, dvs. vi fanger punktet med koordinaterne

$(\cot(t), \csc(t)) = \left(\frac{1}{\tan(t)}, \frac{1}{\sin(t)} \right)$. Du kan nu konstruere kurven som et geometrisk sted drevet af cirkelpunktet.

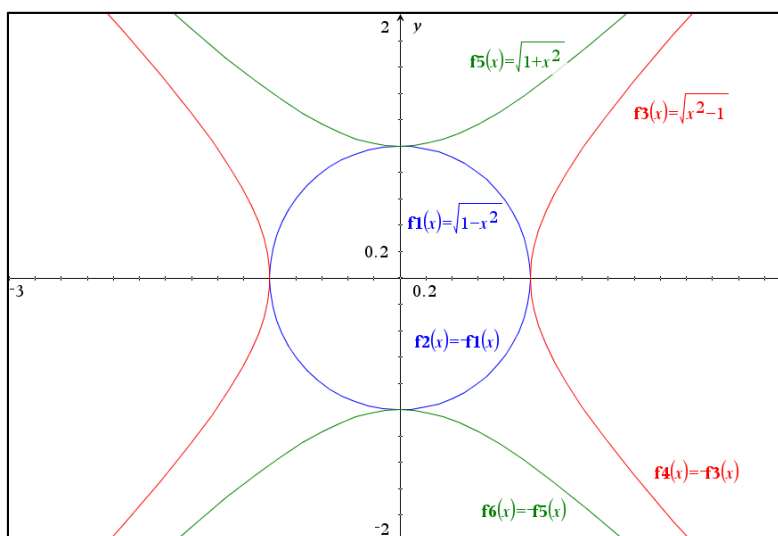
- b) Tegn parameterkurven med parameterfremstillingen idet du igen sætter parametertilvæksten til

$$0.031: x = \cot(t) = \frac{1}{\tan(t)}, \quad y = \csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}$$

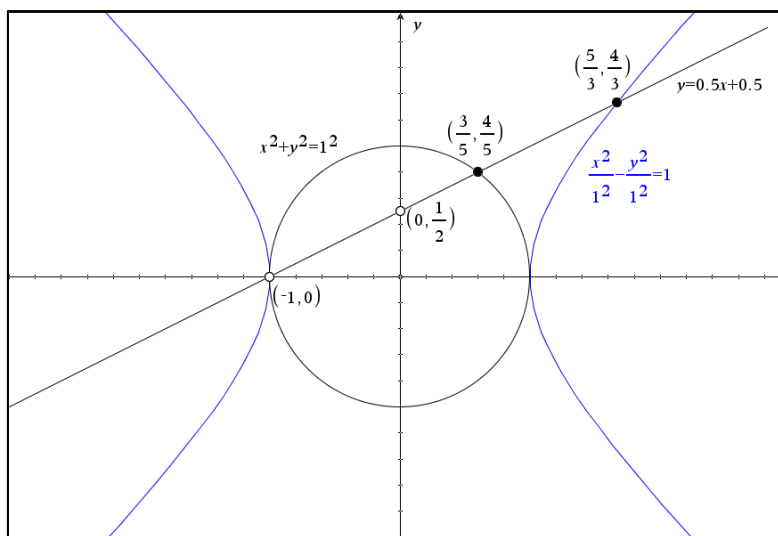
- c) Gør rede for at det geometriske sted/parameterkurven får ligningen

$$y^2 - x^2 = 1$$

Der findes altså to ligesidede hyperbler, idet grenen kan ligge symmetrisk omkring x-aksen eller y-aksen. Cirklen og de ligesidede hyperbler kan som vist også tegnes som grafer for funktioner:



Når vi i det følgende skal lege med keglesnitsflader får vi brug for at kunne håndtere flere parameterfremstillinger for cirklen og den ligesidede hyperbel med symmetri omkring x-aksen. Vi lægger ud med en rational parameterfremstilling for cirklen og den ligesidede hyperbel. Udgangspunktet er da den rette linje fra det bagerste enhedspunkt $(-1,0)$. Den har ligningen $y = k \cdot (x + 1) + 0$ og skærer typisk enhedscirklen henholdsvis den ligesidede hyperbel i yderligere et punkt. Læg mærke til at linjen går gennem punktet $(0,k)$ på y-aksen. Den kan derfor styres simpelt via et frit punkt på y-aksen.



Øvelse 3.5:

- Eftervis at linjen med hældning $\frac{1}{2}$ skærer enhedscirklen i punktet $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ henholdsvis den ligesidede hyperbel i punktet $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.
- Gør rede for at linjen med hældningen k skærer enhedscirklen i punktet $(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2})$ henholdsvis den ligesidede hyperbel i punktet $(\frac{1+k^2}{1-k^2}, \frac{2k}{1-k^2})$.

Vi ser altså at enhedscirklen og den ligesidede hyperbel også har parameterfremstillingerne:

$$\begin{array}{ll} \text{Enheds cirklen:} & \begin{aligned} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} & \text{Den ligesidede hyperbel:} & \begin{aligned} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned} \end{array}$$

De kaldes for *rationale parameterfremstillinger*, fordi de alene bygger på polynomiumsbrøker, hvor polynomierne har heltallige koefficienter. Hvis parameteren t er et rationalt tal $\frac{p}{q}$ gælder det samme derfor for koordinaterne $x_{\text{cirkel}} = \frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$ og $y_{\text{cirkel}} = \frac{2p \cdot q}{q^2+p^2}$ henholdsvis $x_{\text{hyperbel}} = \frac{q^2+p^2}{q^2-p^2}$ og $y_{\text{hyperbel}} = \frac{2p \cdot q}{q^2-p^2}$.

De rationale parameterfremstillinger afbilder den lodrette diameter i enhedscirklen på cirkelns højre gren henholdsvis hyperbelns højre gren. Denne afbildning er så fundamental at den har fået et særligt navn: **Den stereografiske afbildning** eller projektion af cirklen og hyperblen.

Læg også mærke til at x-koordinaterne netop er reciprokke og at y-koordinaterne netop er forholdet mellem de to koordinater i den modsvarende parameterfremstilling, dvs. de følger mønstret i de trigonometriske parameterfremstillinger:

Enhedscirklen: $x = \cos(t)$
 $y = \sin(t)$

Den ligesidede hyperbel: $x = \frac{1}{x_{\text{cirkel}}} = \frac{1}{\cos(t)}$
 $y = \frac{y_{\text{cirkel}}}{x_{\text{cirkel}}} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

Der er da også en snæver sammenhæng mellem de trigonometriske parameterfremstillinger og de rationale parameterfremstillinger.

Øvelse 3.6:

- Gør rede for at hvis den rette linje har retningsvinklen v vil centervinklen for cirkelpunktet netop være $2v$.
- Gør rede for at sammenhængen mellem hældningen k og retningsvinklen v er givet ved $k = \tan(v)$.
- Gør rede for at hvis vi substituerer $k = \tan(v)$ i den rationelle parameterfremstilling for cirklen fås

$$x = \cos(v)^2 - \sin(v)^2$$

$$y = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$$

På den anden side har cirklen netop centervinklen $2v$, dvs. cirkelpunktet har koordinaterne

$$x = \cos(2v)$$

$$y = \sin(2v)$$

Der må derfor gælde fordoblingsformlerne:

$$\cos(2v) = \cos(v)^2 - \sin(v)^2$$

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$$

- Gør rede for at hvis vi substituerer $k = \tan(v)$ i den rationelle parameterfremstilling for hyperblen fås tilsvarende (idet du udnytter fordoblingsformlerne undervejs)

$$x = \sec(2v) = \frac{1}{\cos(2v)}$$

$$y = \tan(2v)$$

Vi har netop fundet fordoblingsformlerne for $\cos$, $\sin$ (og dermed også for tangens):

$$\sin(2v) = 2 \cdot \sin(v) \cdot \cos(v)$$

$$\cos(2v) = \cos(v)^2 - \sin(v)^2$$

$$\tan(2v) = \frac{2 \tan(v)}{1 - \tan(v)^2}$$

Det er specialtilfælde af de såkaldte *additionsformler*, som er endnu vigtigere. Denne gang giver vi et direkte geometrisk argument. Vi tager udgangspunkt i den viste trekant. Først bemærker vi at der gælder

$$\sin(C) = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B)$$

Så splitter vi grundlinjen c ved hjælp af højden fra C og finder

$$c = c_1 + c_2 = a \cdot \cos(B) + b \cdot \cos(A)$$

Men nu kan vi inddrage sinusrelationen i følge hvilken der gælder

$$a \cdot \sin(C) = c \cdot \sin(A) \quad \text{og} \quad b \cdot \sin(C) = c \cdot \sin(B)$$

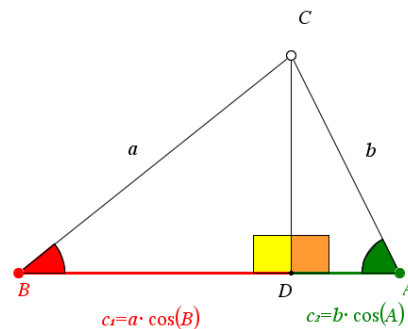
Ganger vi ligningen igennem med $\sin(A + B) = \sin(C)$ fås

$$\sin(A + B) \cdot c = \sin(C) \cdot a \cdot \cos(B) + \sin(C) \cdot b \cdot \cos(A)$$

$$= c \cdot \sin(A) \cdot \cos(B) + c \cdot \sin(B) \cdot \cos(A)$$

Forkorter vi endelig med siden c fås den ønskede sammenhæng:

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cdot \cos(B) + \sin(B) \cdot \cos(A)$$



Skifter vi fortegn på B fører det til formelen

$$\sin(A - B) = \sin(A) \cdot \cos(B) - \sin(B) \cdot \cos(A)$$

Der findes tilsvarende formler for cosinus.

Øvelse 3.7:

- a) Betragt to punkter med retningsvinklerne t og u på enhedscirklen. Gør rede for at

$$\text{retningsvektorerne får koordinaterne } \vec{a} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}$$

- b) Gøre rede for at vinklen mellem de to vektorer kan udregnes således:

$$\cos(v - u) = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

- c) Gør rede for at dette fører til subtraktionsformlen:

$$\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$$

- d) Gør rede for at hvis vi skifter fortegn på u fører det til additionsformlen:

$$\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$$

Vi samler de fundne additions- og subtraktionsformler i det følgende skema (udled selv formlerne for tangens ☺):

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin(A) \cdot \cos(B) + \sin(B) \cdot \cos(A) \\ \sin(A - B) &= \sin(A) \cdot \cos(B) - \sin(B) \cdot \cos(A) \\ \sin(2A) &= 2 \sin(A) \cdot \cos(A) \\ \cos(A + B) &= \cos(A) \cdot \cos(B) - \sin(A) \cdot \sin(B) \\ \cos(A - B) &= \cos(A) \cdot \cos(B) + \sin(A) \cdot \sin(B) \\ \cos(2A) &= \cos(A)^2 - \sin(A)^2 \\ \tan(A + B) &= \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A) \cdot \tan(B)} \\ \tan(A - B) &= \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A) \cdot \tan(B)} \\ \tan(2A) &= \frac{2 \cdot \tan(A)}{1 - \tan(A)^2} \end{aligned}$$

Heldigvis er de indbyggede i TI-Nspire CAS (i hvert fald så længe vi regner i radianer), så ofte vil de blive anvendt uden kommentarer. Men får vi brug for at styre TI-Nspire CAS frelst igennem omskrivningerne er der to hjælpekommandoer, der kan være nyttige: tExpand og tCollect, der er hinandens omvendte kommandoer: tExpand slår en sum/differens i stykker og stumpere, mens tCollect samler dem igen. Fx gælder altså

$$\begin{array}{ccc} & tExpand & \\ \sin(A + B) & \square & \sin(A) \cdot \cos(B) + \sin(B) \cdot \cos(A) \\ & tCollect & \end{array}$$

Det er tydeligvis analoge processer til at gange ind i parenteser og til at sætte uden for parenteser. I TI-Nspire CAS ser det fx således ud:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &\rightarrow \sin(a+b) \\ \cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b) &\rightarrow \cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b) \\ tExpand(\sin(a+b)) &\rightarrow \cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b) \\ tCollect(\cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b)) &\rightarrow \sin(a+b) \end{aligned}$$

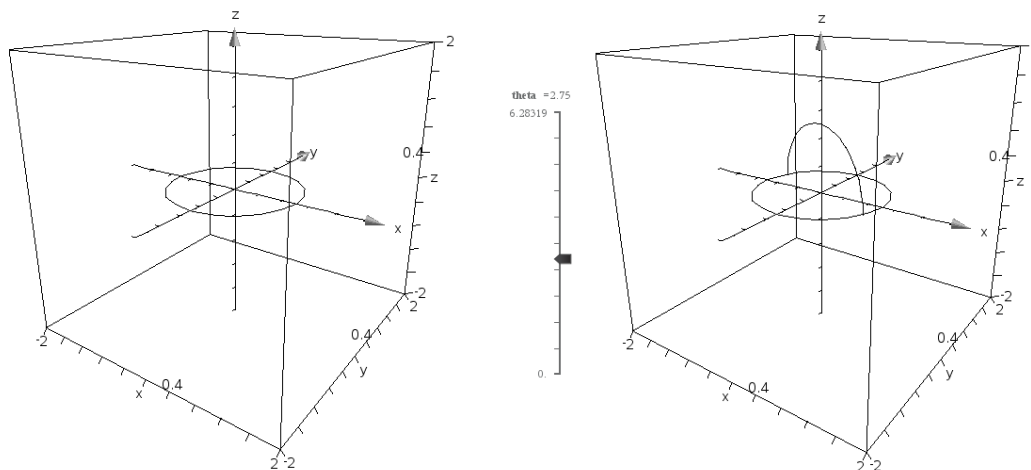
3.2 Simple omdrejningslegemer

Vi skal nu høste frugterne af vores arbejde med trigonometrien ☺. Vi varmer op med at tegne nogle simple men fundamentale omdrejningsflader.

Først ser vi på **enhedskuglen**: Udgangspunktet er ækvatorcirklen, dvs. enhedscirklen i x-y-planen. Den har selvsagt parameterfremstillingen

$$\{\cos(t), \sin(t), 0\}$$

Heldigvis er parameterintervallet som standard sat til at løbe fra 0 til 2π :

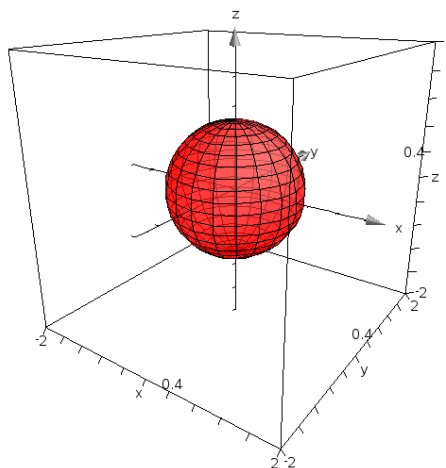


Vi tilføjer så en lodret cirkel, der løber rundt om z-aksen. For en fast værdi af retningsvinklen θ med tilhørende retningsvektor $\vec{e}_\theta$ har den parameterfremstillingen (med enhedsvektoren $\vec{k}$ langs z-aksen)

$$\begin{aligned} \cos(u) \cdot \vec{e}_\theta + \sin(u) \cdot \vec{k} &= \cos(u) \cdot \{\cos(\theta), \sin(\theta), 0\} + \sin(u) \cdot \{0, 0, 1\} \\ &= \{\cos(\theta) \cdot \cos(u), \sin(\theta) \cdot \cos(u), \sin(u)\} \end{aligned}$$

Indføres en skyder for retningsvinklen θ kan vi nu som vist sende cirklen rundt om z-aksen. Det eneste problem er at vi kun får tegnet en halvcirkel, fordi u -parameteren som standard er sat til at løbe fra 0 til π . Det kommer vi til at forholde os til i det følgende ☺. For at få tegnet selv kuglefladen omdøbes retningsvinklen θ til parameteren t samtidigt med at vi retter parameterintervallet for u til at løbe fra $-\pi/2$ til $\pi/2$.

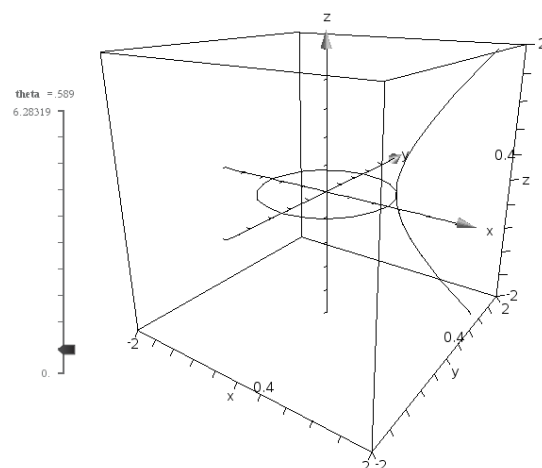
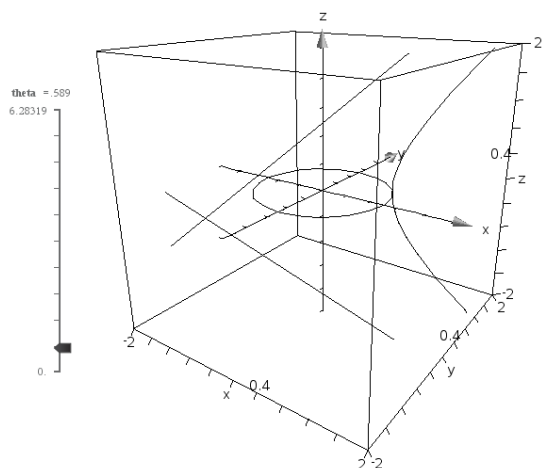
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$



Det ser jo lovende ud! Parameterkurverne for t er breddecirkler (vandrette cirkler) og parameterkurverne for u er meridianer (lodrette halvcirkler). I forhold til matematisk standardpraksis er det eneste vi skal passe på med definitionen af parametervinklen u . Den defineres traditionelt som *polvinklen* (dvs. vinklen i forhold til z-aksen), mens vi har defineret den som *højdevinklen* (dvs. vinklen i forhold til x-y-planen).

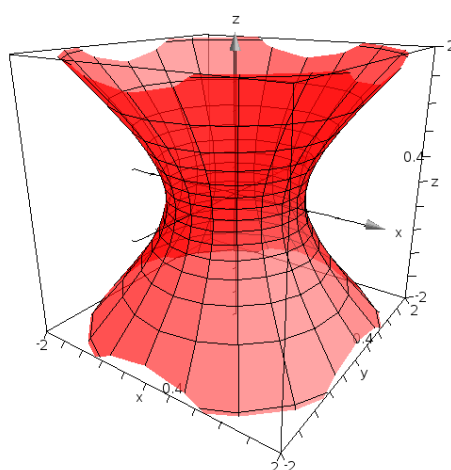
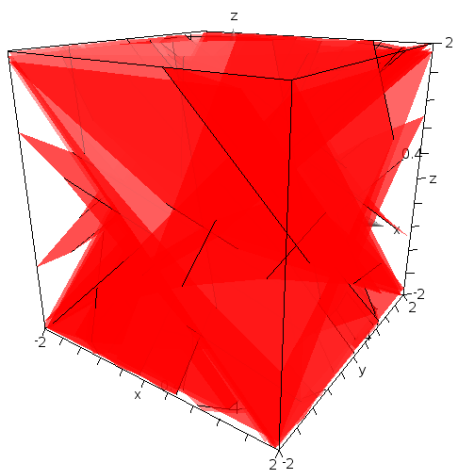
Drejer vi i stedet en ligesidet hyperbel rundt om z-aksen fås en *omdrejningshyperboloide*. Igen kan vi tage udgangspunkt i en ækvatorcirkel og en lodret ligesidet hyperbel, der drejer rundt om z-aksen. For en fast værdi af retningsvinklen θ med tilhørende retningsvektor $\vec{e}_\theta$ har den parameterfremstillingen (med enhedsvektoren $\vec{k}$ langs z-aksen)

$$\begin{aligned}\sec(u) \cdot \vec{e}_\theta + \tan(u) \cdot \vec{k} &= \sec(u) \cdot \{\cos(\theta), \sin(\theta), 0\} + \tan(u) \cdot \{0, 0, 1\} \\ &= \{\cos(\theta) \cdot \sec(u), \sin(\theta) \cdot \sec(u), \tan(u)\}\end{aligned}$$



Indføres en skyder for retningsvinklen θ kan vi nu som vist sende den ligesidede hyperbel rundt om z-aksen, idet vi husker at sætte parameterintervallet for u til at løbe fra $-\pi/2$ til $\pi/2$. Det eneste problem er at vi også får tegnet asymptoterne med, fordi u -parameteren afrundes en anelse i slutpunkterne. De kan fjernes ved at indskrænke parameterintervallet en anelse ☺. For at få tegnet selv hyperboloidefladen omdøbes retningsvinklen θ til parameteren t samtidigt med at vi retter parameterintervallet for u til at løbe fra $-\pi/2$ til $\pi/2$. Glemmer vi at rette parameterintervallet bliver resultatet en katastrofe, fordi 3d-grafer ikke kan håndtere diskontinuiteterne i tangens-funktionen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \sec(u) \\ \sin(t) \cdot \sec(u) \\ \tan(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \sin(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \tan(u) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$



Bemærkning: Det er ikke altid parameterintervallet opdateres automatisk efter man har rettet det til. Så må man ind i grafens forskrift og lige gennemtvinge en gentegning af figuren. Det ser jo igen lovende ud! Parameterkurverne for t er breddecirkler (vandrette cirkler) og parameterkurverne for u er meridianer

(lodrette ligesidede hyperbler). Fordi hyperboloiden er sammenhængende kaldes den også for en omdrejningshyperboloide med et net. Den vil vise sig at blive uhyre interessant for os om et lille øjeblik!

Øvelse 3.8:

- a) Gør rede for at enhedskuglen med parameterfremstillingen
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(t) \cdot \cos(u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}$$
 får ligningen

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vink: Udregn først $x^2 + y^2$ henholdsvis z^2 og sammenhold de to resultater.

Prøv også at isolere z og tegne enhedskuglen som grafen for de to fremkomne funktioner. Hvorfor er det en dårlig idé?

- b) Gør rede for at omdrejningshyperboloiden med et net med parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \sin(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \tan(u) \end{bmatrix} \text{ får ligningen } x^2 + y^2 - z^2 = 1. \text{ Vink: Udregn først } x^2 + y^2 \text{ henholdsvis } z^2 \text{ og}$$

sammenhold de to resultater.

Prøv også at isolere z og tegne omdrejningshyperboloiden som grafen for de to fremkomne funktioner. Hvorfor er det en dårlig idé?

Øvelse 3.9:

- a) Som vi har set er der to måder at frembringe en ligesidet hyperbel, idet den også kan lægges omkring z -aksen. Det fører til *omdrejningshyperboloiden med to net*. Gør rede for at

$$\text{omdrejningshyperboloiden med to net får parameterfremstillingen } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \tan(u)^{-1} \\ \sin(t) \cdot \tan(u)^{-1} \\ \sin(u)^{-1} \end{bmatrix} \text{ samt}$$

ligningen $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. Vink: Udregn først $x^2 + y^2$ henholdsvis z^2 og sammenhold de to resultater.

Prøv også at isolere z og tegne omdrejningshyperboloiden som grafen for de to fremkomne funktioner. Hvorfor er det denne gang en god idé?

Øvelse 3.10:

- a) Hvis du drejer en lodret linje omkring z -aksen fås en *cylinder*. Gør rede for at det fører til

$$\text{parameterfremstillingen } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \tan(u) \end{bmatrix}, \text{ samt at cylinderen får ligningen } x^2 + y^2 = 1.$$

- b) Hvis du drejer en skrå diagonallinje gennem Origo (0,0,0) omkring z -aksen fås en *retvinklet*

$$\text{dobbeltkegle. Gør rede for at det fører til parameterfremstillingen } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \tan(u) \\ \sin(t) \cdot \tan(u) \\ \tan(u) \end{bmatrix}, \text{ samt at}$$

dobbeltkeglen får ligningen $x^2 + y^2 = z^2$.

3.3 Hyperboloiden med et net

For at se hvordan denne type dobbelt retlinjede flade opstår, tager vi denne gang udgangspunkt i to cirkler, der forbindes med en ret linje, så endepunkterne glider med jævn hastighed rundt på cirklerne. Hyperboloiden er sværere at undersøge end paraboloiden, så vi vil fra starten sætte nogle begrænsninger på cirklerne, der gør det nemmere at gennemføre undersøgelsen:

1. De to cirkler skal ligge i parallelle planer.
2. Forbindelseslinjen mellem deres centre skal stå vinkelret på deres planer.

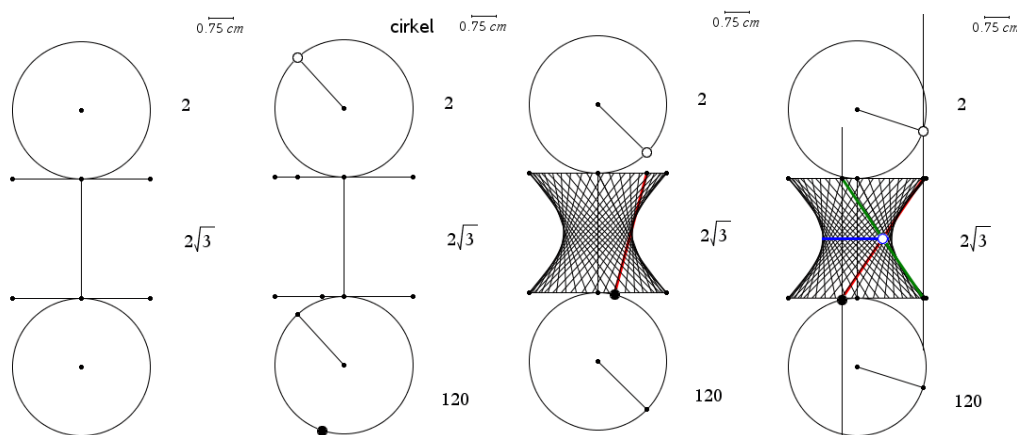
Det svarer løst sagt til koncentriske cirkler i planen, hvor den ene cirkel nu bare flyttes vinkelret ud i rummet. En konkret model viser ideen:

Vi starter med en øvelse i 2d-geometri, der så at sige viser situationen set fra oven (tegn selv!):

Øvelse 3.11:

- a) Tegn en cirkel med radius 2. Afsæt et frit punkt på cirklen og konstruer nu et punkt på samme cirkel, der er forskudt en fast vinkel på 120° . Forbind de to punkter.
- b) Konstruer sporingen eller det geometriske sted for forbindelseslinjen, når det frie punkt drejer rundt på cirklen.
- c) Gør rede for at alle forbindelseslinjerne tangerer enhedscirklen med samme centrum og at denne derfor er indhylningskurven for det geometriske sted. Indhylningskurven kaldes **strubecirklen**.
- d) Gør rede for at strubecirklen netop frembringes af midtpunkterne for linjestykkerne. Forskydningen i forhold til midtpunktet er derfor 60° .
- e) Gør rede for at det *ikke* gør nogen forskel om vi drejer 120° i positiv eller negativ retning.

Vi flytter nu rundt på konstruktionen, så den ligner den rumlige set fra siden, men bliv i 2d-geometri!

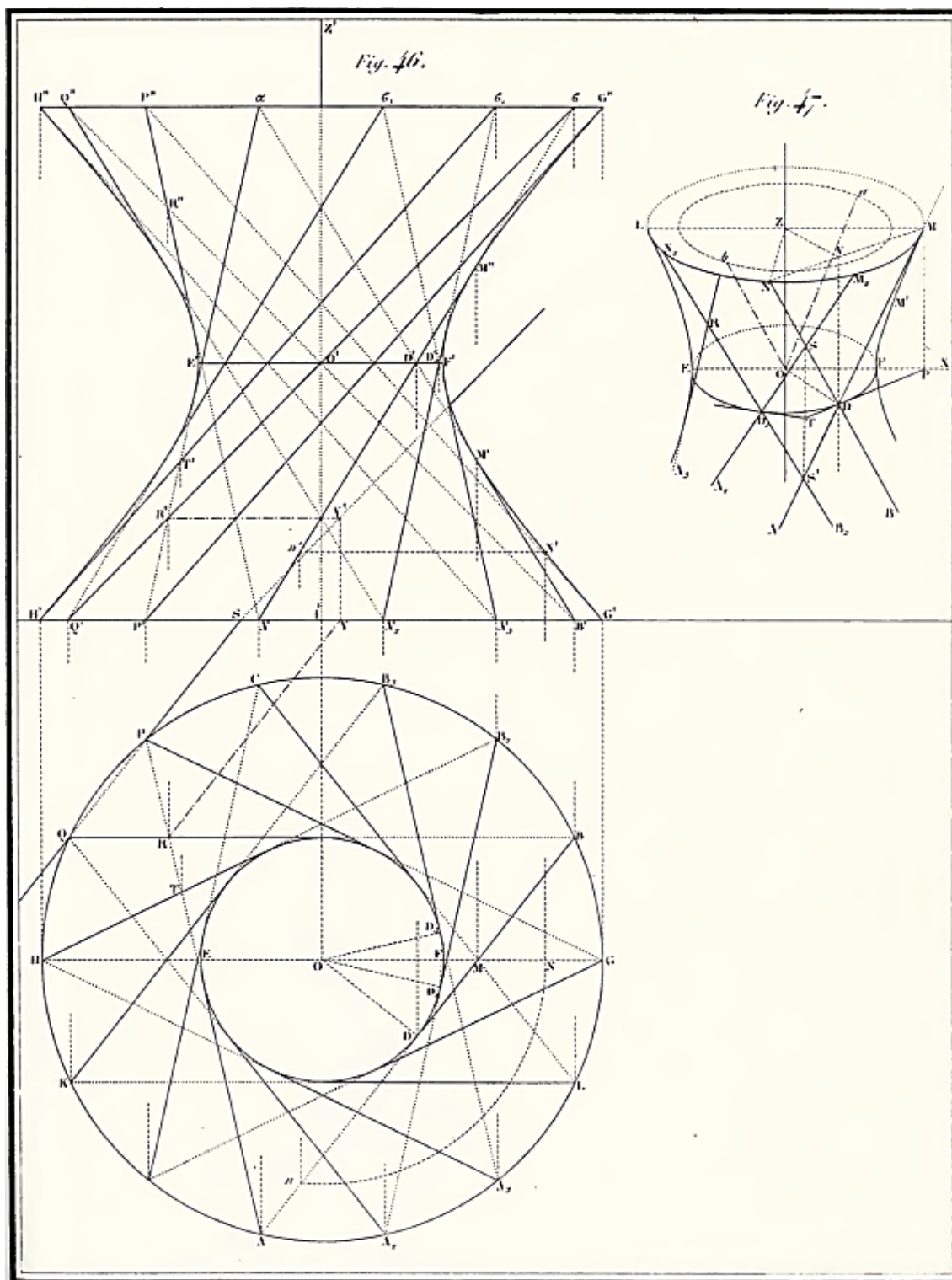


Øvelse 3.12:

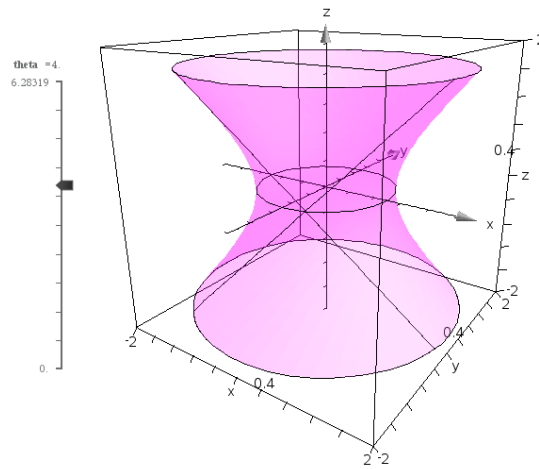
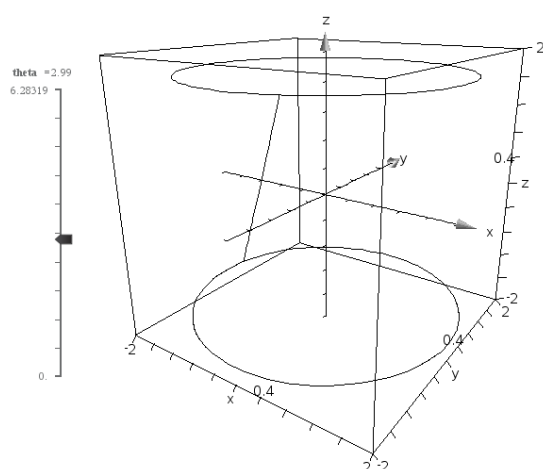
- a) Tegn to vandrette linjestykker af længden 4 under hinanden så de er adskilt med den lodrette afstand $2\sqrt{3}$. De to vandrette linjestykker repræsenterer to cirkler i rummet set fra siden. Men vi har også tegnet de to cirkler oven på og nedenunder linjestykkerne, så vi kan sætte punkter i jævn cirkelbevægelse!
- b) Afsæt et frit hvidt punkt på den øverste cirkel og benyt fx en parallelforskydning til at overføre det hvide punkt til det tilsvarende sorte punkt på den nederste cirkel. Det sorte punkt drejes nu 120° . Det oprindelige hvidepunkt og det drejede sorte punkt projiceres ind på de vandrette linjestykker.
- c) Forbind projektionerne med et rødt linjestykke og træk nu i det hvide punkt! Konstruer derefter det geometriske sted for linjestykket, som det drives af det hvide punkt. Du har nu fremstillet et billede af omdrejningsfladen frembragt af frembringeren, dvs. den vindskæve linje i forhold til aksen, som roteres omkring aksen.

- d) Projicer også det hvide punkt og det drejede punkt på de modsatte vandrette linjestykker og forbind projektionerne med et grønt linjestykke. Tilsammen udgør det røde linjestykke og det grønne linjestykke frembringerne gennem skæringspunktet på ækvatorcirklen (strubecirklen) for hyperboloiden. Denne kan nu fx frembringes som det geometriske sted for skæringspunktet.

Når du har gennemført disse to øvelser har du med moderne dynamisk geometri opnået det samme som Leroy opnåede i sin deskriptive geometri i den lærebog som Gaudi selv blev undervist efter:



Vi flytter nu konstruktionen op i rummet!



Øvelse 3.13:

- Overvej først, at i en ligesidet enhedshyperbel i x-z-planen, der svarer $x=2$ til $z=\tan(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$.
- Tegn en cirkel med radius 2 i højden $z=\sqrt{3}$ og endnu en cirkel med radius 2 i højden $z=-\sqrt{3}$.
- Opret en skyder for en retningsvinkel θ . Forbind et punkt på den øverste cirkel P med retningsvinklen θ og endnu et punkt Q på den nederste cirkel med retningsvinklen $\theta+120^\circ$ (eller $\theta+\frac{2}{3}\pi$ hvis du arbejder i radianer). Træk i skyderen så du får en fornemmelse for situationen ☺.
- Opret en flade som det geometriske sted for linjestykket, der drejes rundt, idet retningsvinklen θ erstattes af parameteren t .
- Du har nu afbildet det ene sæt frembringere. Det andet fremkommer ved at erstatte forskydningen 120° med -120° og overlejre de to flader med hinanden. Det er godt at gøre dem gennemsigtige, så du tydeligere kan se gitternettene på fladen.

Vi har nu konstrueret en dobbeltretvinklet flade. Der er tydelig omdrejningssymmetri omkring z-aksen, og alle niveaukurverne er derfor cirkler. Den mindste cirkel i x-y-planen kaldes *strubecirklen*. Det er åbenlyst en enhedscirkel. Men spørgsmålet er hvad det er for en kurve, der drejes omkring z-aksen? For at få styr på det vil vi parametrisere fladen omhyggeligt! Vi tager udgangspunkt i et punkt på strubecirklen

$$\{\cos(t), \sin(t), 0\}$$

Det skal forbindes med punkter på den øverste og nederste cirkel som er forskudt 60° i hver sin retning,

idet vi husker på at disse cirkler har radius 2 og ligger i højderne $\tan(-\frac{\pi}{3})$ og $\tan(\frac{\pi}{3})$:

$$\left\{2 \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right), 2 \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right), \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \quad \text{og} \quad \left\{2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Retningsvektoren for linjestykket er derfor givet ved

$$\left\{2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} - \{\cos(t), \sin(t), 0\} = \left\{2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos(t), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin(t), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

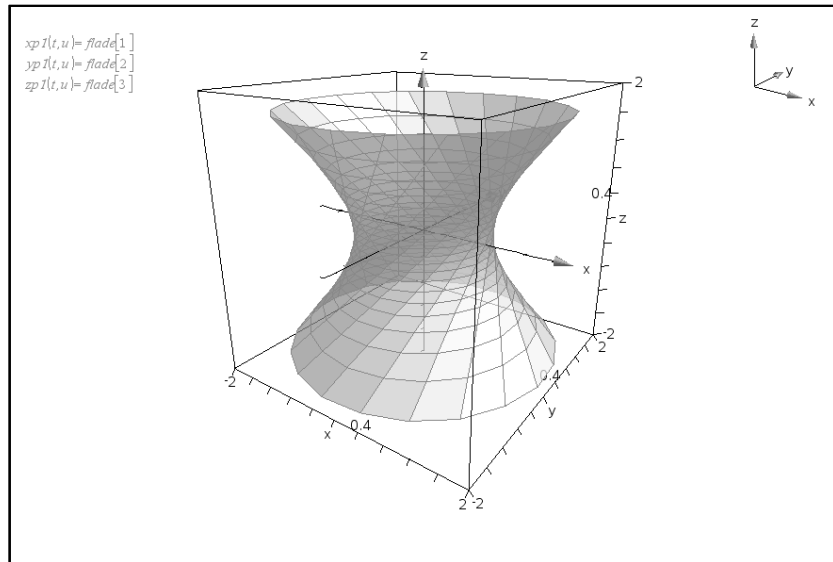
Som parameter for det rette linjestykke vil vi bruge $\tan(u)$, dvs. samme højde som vi bruger i hyperboloideparametriseringerne. Vi finder da den følgende parameterfremstilling for linjestykket

$$\{\cos(t), \sin(t), 0\} + \frac{\tan(u)}{\tan(\frac{\pi}{3})} \cdot \left\{2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos(t), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin(t), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{3} \leq u \leq \frac{\pi}{3}$$

Dette er den kanoniske parametrisering af vores dobbelt retlinede flade. Vi kan tjekke den gør hvad den skal ved at tegne den tilhørende graf:

$$\mathbf{flade} = \left\{ \cos(t), \sin(t), 0 \right\} + \frac{\tan(u)}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \left\{ 2 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \cos(t), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin(t), \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(u) + \cos(t) \cdot (3 \cdot \cos(u) - \sqrt{3} \cdot \sin(u))}{3 \cdot \cos(u)}, \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot (3 \cdot \cos(u) - \sqrt{3} \cdot \sin(u))}{3 \cdot \cos(u)}, \tan(u) \right\}$$



Det ser bestemt lovende ud. Men parameterfremstillingen er lidt snasket. Så vi slår den i stykker med en tExpand-kommando, dvs. vi udvider udtrykkene $\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ og $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ for at se hvad der sker:

$$\mathbf{tExpand}(\mathbf{flade}) \cdot \left\{ \frac{\cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)}{\cos(u)}, \frac{\cos(t) \cdot \sin(u) + \sin(t) \cdot \cos(u)}{\cos(u)}, \tan(u) \right\}$$

Det ser overordentligt lovende ud! Måske kan du genkende additionsformlerne, men ellers kan du samle leddene med en tCollect-kommando:

$$\mathbf{tCollect}(\mathbf{tExpand}(\mathbf{flade})) \cdot \left\{ \frac{\cos(t+u)}{\cos(u)}, \frac{\sin(t+u)}{\cos(u)}, \tan(u) \right\}$$

Så kan det ikke blive simplere! Vi har vist at den dobbeltretlinjede flade med de vandrette cirkler som t-kurver og det ene hold frembringere som u-kurver har parameterfremstillingen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t+u) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \sin(t+u) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \tan(u) \end{bmatrix}$$

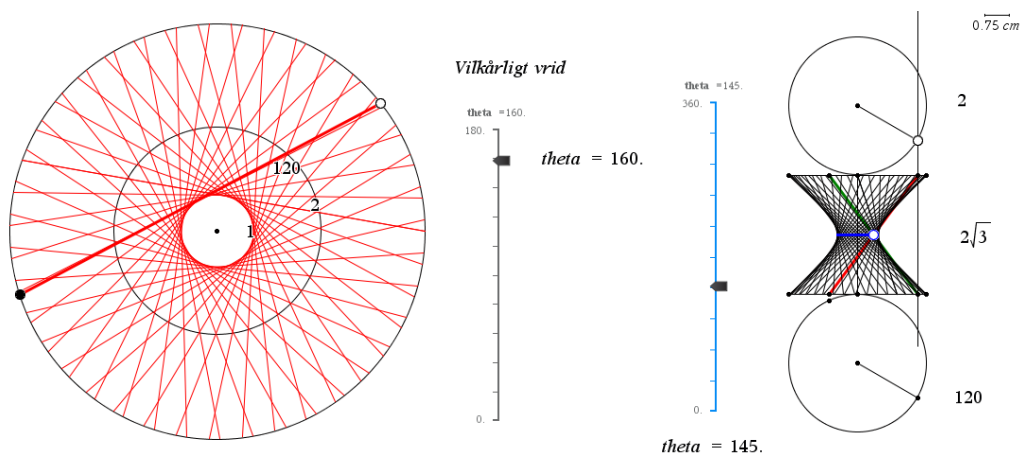
Holder vi u fast er der netop tale om cirkler med radius $\cos(u)^{-1}$ i den vandrette plan $z = \tan(u)$. Holder vi $t+u$ fast er der til gengæld tale om ligesidede hyperbler med parametriseringen

$$\{\sec(u), \tan(u)\} = \{\cos(u)^{-1}, \tan(u)\}$$

i den lodrette plan frembragt af den vandrette enhedsvektor $\vec{e}_{t+u} = \{\cos(t+u), \sin(t+u), 0\}$ og den lodrette enhedsvektor $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$. Fx vil snittet med x-z-planen, hvor $t = 0$ netop svarer til at vi sætter $t = -u$, hvorved vi finder parametriseringen af den ligesidede enhedshyperbel i x-z-planen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec(u) \\ 0 \\ \tan(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u)^{-1} \\ 0 \\ \tan(u) \end{bmatrix} !$$

Inden vi går videre med parametriseringerne af hyperboloiden vil vi lige se lidt nærmere på modellen med de to cirkler, der har fælles akse, og den vindskæve linje, der roteres omkring akse. Vi har brugt et bestemt vrid på 120° mellem de to cirkler, men kan sagtens lave det om til et vilkårligt vrid!

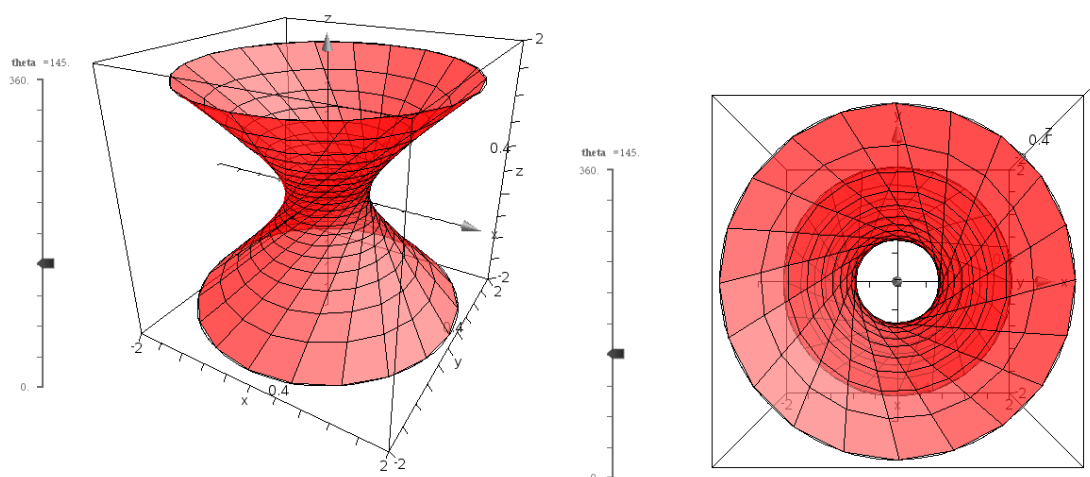


Øvelse 3.14: (Fortsættelse af øvelse 3.11!)

- Indfør en skyder for vrid-vinklen θ . Opret også en tekstboks med teksten θ og udfør en beregning af tekstboksen, hvor du taster L for at acceptere variabelens værdi.
- Udfør en drejning på vinklen θ af det hvide punkt, idet du klikker på tallet for θ , for at definere drejningsvinklen.
- Højreklik på det sorte 120° -punkt og vælg omdefinier. Klik på det nye θ -punkt og hele konstruktionen følger med ☺.
- Hvad sker der i grænsen hvor $\theta = 0$ henholdsvis $\theta = 180$? Hvilke flader tror du det svarer til?

Øvelse 3.15: (Fortsættelse af øvelse 3.12!)

- Indfør igen en skyder for vrid-vinklen θ . Opret også en tekstboks med teksten θ og udfør en beregning af tekstboksen, hvor du taster L for at acceptere variabelens værdi.
- Udfør en drejning på vinklen θ af det punkt på den nederste cirkel, der korresponderer med det hvide punkt, idet du klikker på tallet for θ , for at definere drejningsvinklen.
- Højreklik på det sorte 120° -punkt og vælg omdefinier. Klik på det nye θ -punkt og hele konstruktionen følger med ☺.
- Hvad sker der i grænsen hvor $\theta = 0$ henholdsvis $\theta = 180$? Hvilke flader tror du det svarer til?



Øvelse 3.16: (Forsættelse af øvelse 3.3)

- a) Denne gang skal vi forbinde punktet $\left\{2 \cdot \cos\left(t - \frac{\theta}{2}\right), 2 \cdot \sin\left(t - \frac{\theta}{2}\right), -\sqrt{3}\right\}$ på den nederste cirkel med punktet $\left\{2 \cdot \cos\left(t + \frac{\theta}{2}\right), 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\theta}{2}\right), \sqrt{3}\right\}$ på den øverste cirkel. Igen kan det betale sig at bruge parametriseringen $z = \tan(u)$. Gør rede for at det fører til parametriseringen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\tan(u)}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot \cos\left(t + \frac{\theta}{2}\right) - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\theta}{2}\right) - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(t) \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

- b) Gør rede for at strubecirklen i ækvatorplanen denne gang har radius $2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ hvor θ er vridvinklen.
- c) Hvad sker der i grænsen hvor $\theta = 0$ henholdsvis $\theta = 180^\circ$? Hvilke flader tror du det svarer til?

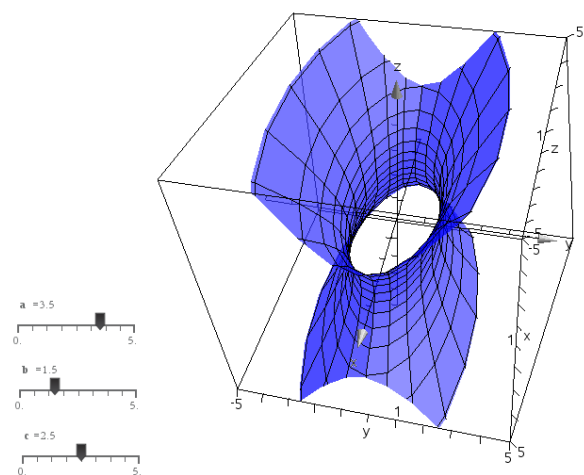
Hvis vridvinklen $\theta = \frac{2\pi}{3}$ har vi set det fører til en ligesidet hyperboloide. Men i almindelighed er hyperboloider ikke ligesidede og de behøver heller ikke være omdrejningslegemer. For at forstå det nærmere tager vi udgangspunkt i enhedshyperboloiden med ligningen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ og standardparameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \sin(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \tan(u) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hvis vi skalerer de tre akser uafhængigt af hinanden (den tekniske betegnelse er at vi udfører rette affiniteter ud fra de tre koordinatplaner) ændres ligningen henholdsvis parameterfremstillingen til de følgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{samt} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ b \cdot \sin(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ c \cdot \tan(u) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

Der er stadigvæk tale om en dobbelt retlinjet flade, da rette linjer overføres i rette linjer ved sammentrykningen. Men de vandrette snit er nu almene ellipser (med faste halvakser a og b) ligesom de lodrette snit gennem z -aksen, nu er almene hyperbler (med varierende halvakser $\sqrt{a^2 \cdot \cos(t)^2 + b^2 \cdot \sin(t)^2}$ og c). For at illustrere det skal vi bruge parameterfremstillingen samt tre skydere for a , b og c .



Vi kan se hvor frembringerne kommer fra ved fx at sætte $x = a$. Denne lodrette plan skærer da netop hyperboloiden i to retlinjede frembringere idet vi finder

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0$$

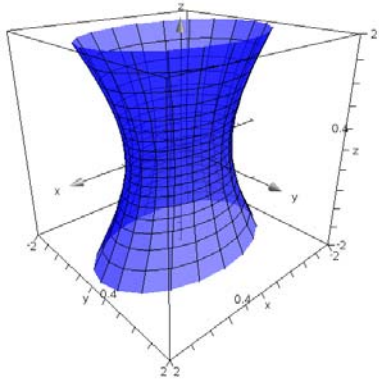
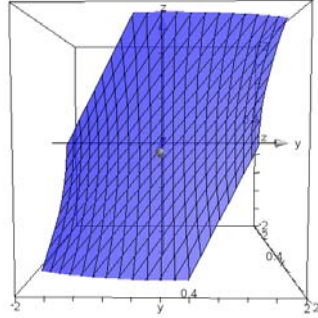
De to rette linjer er altså fastlagt som

$$x = a, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{henholdsvis} \quad x = a, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$$

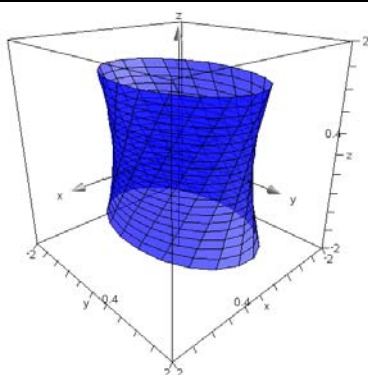
Øvelse 3.17:

- Vis at parameterkurverne svarende til $u = t$ henholdsvis $u = -t$ netop er de samme to frembringere som nævnt ovenfor.
- Hvilke frembringere svarer parameterkurverne med $u = t - \frac{\pi}{2}$ henholdsvis $u = \frac{\pi}{2} - t$ til?
- Illustrer også disse parameterkurver på fladen, idet du slukker for nettet.

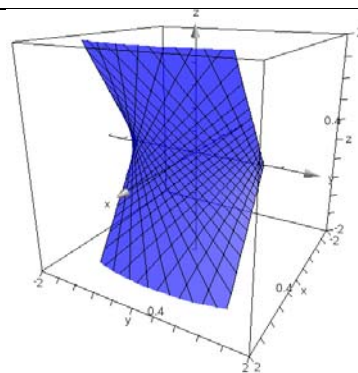
Vi kan opsummere vores hidtige erfaringer med parametriseringer af hyperboloider med et net således:

$\begin{matrix} \backslash & t\text{-kurver} \\ u\text{-kurver} & \backslash \end{matrix}$	Vandrette ellipser	Skrå linjer
Lodrette hyperbler	 $\begin{bmatrix} a \cdot \cos(t) \cdot \sec(u) \\ b \cdot \sin(t) \cdot \sec(u) \\ c \cdot \tan(u) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -\pi \leq t \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$	 $\begin{bmatrix} a \cdot \cos(t) \cdot \sec(t-u) \\ b \cdot \sin(t) \cdot \sec(t-u) \\ c \cdot \tan(t-u) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{4} \end{matrix}$

Skrå linjer



$$\begin{bmatrix} a \cdot \cos(t+u) \cdot \sec(u) \\ b \cdot \sin(t+u) \cdot \sec(u) \\ c \cdot \tan(u) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -\pi \leq t \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

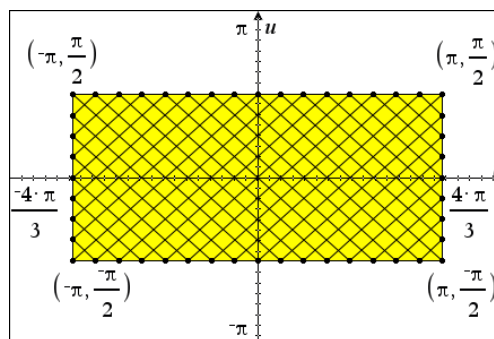
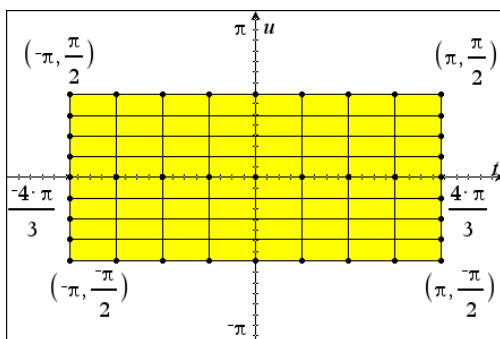


$$\begin{bmatrix} a \cdot \cos(t+u) \cdot \sec(t-u) \\ b \cdot \sin(t+u) \cdot \sec(t-u) \\ c \cdot \tan(t-u) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Læg mærke til at vi har måttet indskrænke parameterintervallerne i den anden søjle. Det sker for at undgå diskontinuiteten i tangens-funktionen som ellers vil tvinge fladen til at fremstå som et misk-mask. Lad os først forstå indskrænkningen. Vi kigger først på standardparametriseringen,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \sin(t) \cdot \cos(u)^{-1} \\ \tan(u) \end{bmatrix}$$

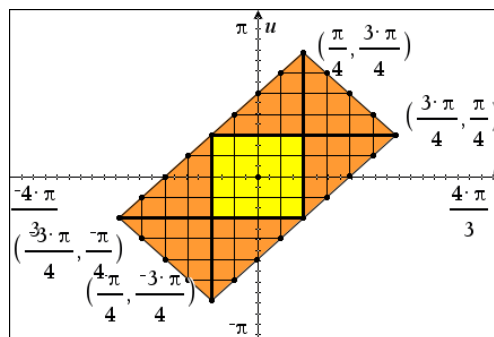
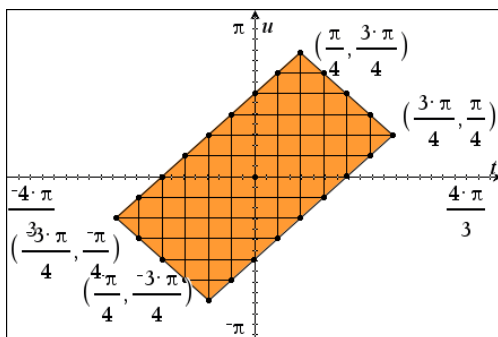
hvor der indgår $\tan(u)$ såvel som den reciproke cosinus-funktion $\cos(u)^{-1}$:



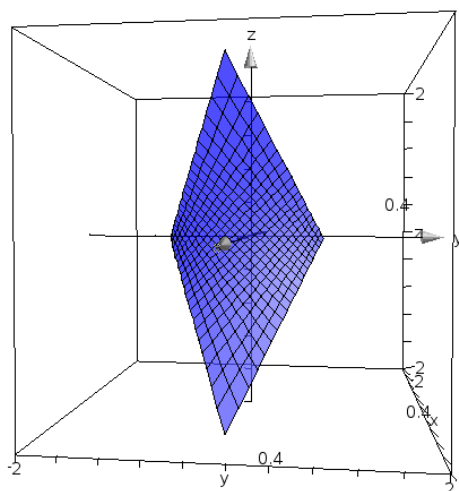
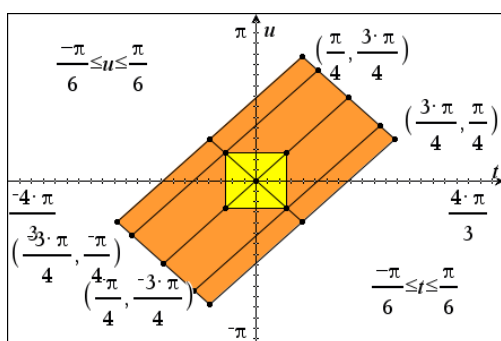
Vi skal derfor undgå nulpunkterne for cosinus, dvs. vi skal indskrænke u -intervallet til $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$. Hvad t -intervallet angår, skal vi blot indskrænke det til et interval af længden 2π på grund af periodiciteten. Af symmetrigrunde lader vi det være intervallet $-\pi \leq t \leq \pi$. De vandrette linjer afbildes nu på cirkler, mens de lodrette linjer afbildes på ligesidede hyperbler. De skrå diagonallinjer afbildes tilsvarende på frembringerne. Man kan tænke på parametriseringen som en projektion af parameterområdet, hvor man først folder det vandret til en cylinder, så man får frembragt alle cirklerne. Dernæst trækker og strækker man i cylinderen, så den deformeres til en omdrejningshyperboloide.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t+u) \cdot \cos(t-u)^{-1} \\ \sin(t+u) \cdot \cos(t-u)^{-1} \\ \tan(t-u) \end{bmatrix}$$

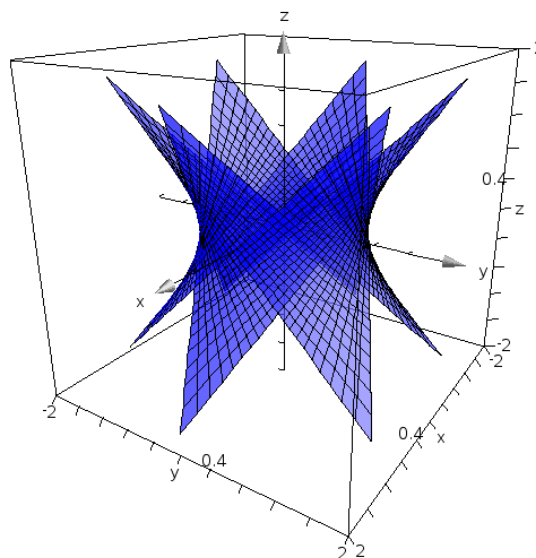
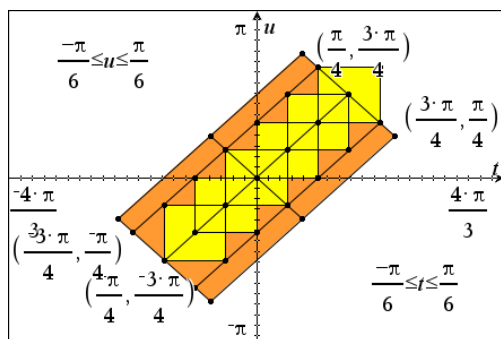
Skifter vi til den parameterfremstilling, hvor parameterkurverne er frembringere, så svarer det til en rotation på 45° i parameterrummet. Asymptoterne/diskontinuiteterne ligger nu i de skrå linjer $t-u = \pm \frac{\pi}{2}$. Tilsvarende begrænses parameterkombinationen $t+u$ til $-\pi \leq t+u \leq \pi$. Det maksimale parameterområde ser nu således ud:



Men TI-nspire CAS kan ikke tegne projektionen af et parameterområde der ligger skævt, så derfor er man nødt til at indskrænke parameterområdet til et rektangel med vandrette og lodrette sider! I praksis kan man derfor højst dække en fjerdedel af hyperboloiden med parameterintervallet $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}$. Da parameterkurven $u=t$ får parameterfremstillingen $\{\cos(2t), \sin(2t), 0\}$ kan vi altså højst nå halvvejs rundt om paraboloiden ☹. Til gengæld er der ingen grund til at prøve at komme helt ud til asymptoterne. Vi kan passende stoppe i højden $\sqrt{3}$, dvs. når $t-u=\frac{\pi}{3}$. Det kan give anledning til den følgende overdækning af parameterområdet:



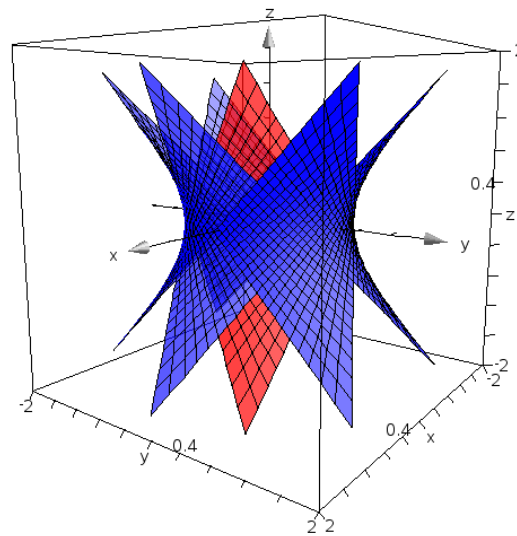
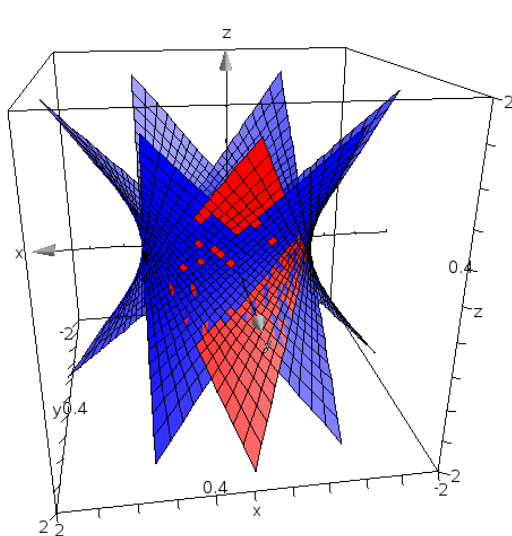
Skubber vi nu behændigt den vindskæve firkant rundt omkring z-aksen kan vi få en overdækning med seks vindskæve firkanter, der rækker hele vejen rundt:



Øvelse 3.18:

- Prøv at gøre overdækningen tættere ved at indskyde flere vindskæve firkanter, idet du lader parameterintervallerne vokse med $\pi/12$ i stedet for $\pi/6$. Gør rede for at hver af de vindskæve firkanter netop dækker en tredjedel af omkredsen.

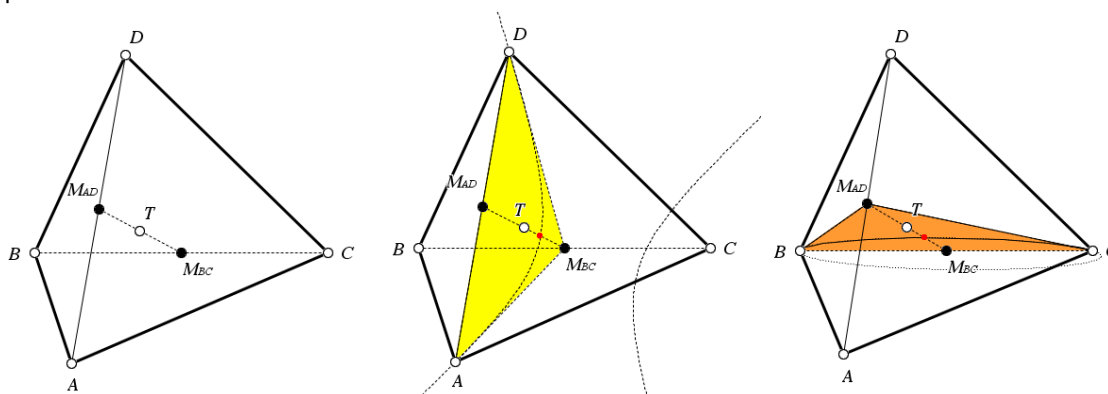
- b) Hvis takkerne skal have forskellige farver må de vindskæve firkanter helst ikke overlappe, da der ellers kommer flimmer i facetterne (hvilket selvfølgelig kunne være en effekt man ønskede). I så fald skal man tildele de nye takke parameterfirkanter der ikke overlapper med de gamle. Gør rede for at parameterområdet fx kan vælges således: $-\frac{\pi}{12} \leq t \leq 0$, $\frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{4}$.



Øvelse 3.19

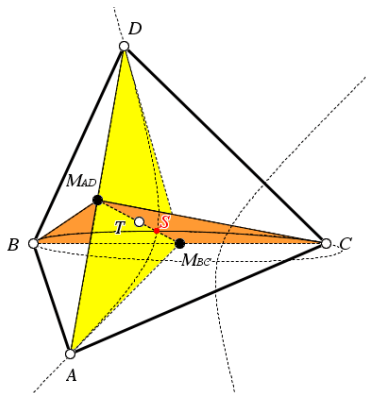
- a) Prøv også at eksperimentere med andre inddelinger fx $-\frac{\pi}{8} \leq t \leq \frac{\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{8} \leq u \leq \frac{\pi}{8}$, der giver en overdækning med 8 vindskæve firkanter.
- b) Kan du nøjes med en overdækning på 5 vindskæve firkanter?

Når man bruger elliptiske hyperboloider i parametrisk design vil fokus ligge på de retlinjede frembringere og den tilhørende ramme: Den vindskæve firkant, som de skal indpasses i. Ligesom i plangeometrien må vi da forvente at der er mulighed for et helt kontinuum af hyperboloideflader, der i grænsen nærmer sig paraboloidfladen.



For simpelheds skyld vil vi kun se på en vindskæv rombe, hvor forholdene er særligt simple. Trekkanterne BAC og BDC er altså ligebenede. Vi ved da, at der er en hyperbel i fladen, som forbinder A med D i trekanten $AM_{BC}D$ og tilsvarende er der en ellipse i fladen, der forbinder B med C i trekanten $BM_{AD}C$. Paraboloidfladen ville nu gå gennem tyngdepunktet T , dvs. midtpunktet for midterstykket $M_{AD}M_{BC}$. Den

'lodrette' hyperbel derimod vil nødvendigvis passere midterstykket tættere på M_{BC} og tilsvarende for den 'vandrette' ellipse.



Vælger vi et vilkårligt styrepunkt S mellem tyngdepunktet T og midtpunktet M_{BC} vil der derfor være netop én 'lodret' hyperbel og en 'vandret' ellipse, der går gennem styrepunktet S . Vi har altså en større frihed i valget af hyperboloidefladen. Denne frihed kan vi bruge til at stille forskellige krav til hyperboloidefladen, fx at den om muligt skal være en omdrejningsflade. Men i så fald skal ellipsen jo være en cirkel og det er altid muligt!

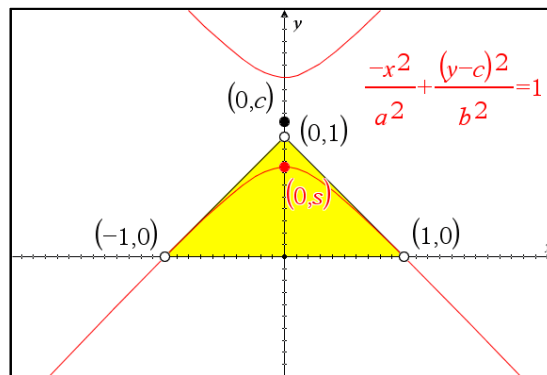
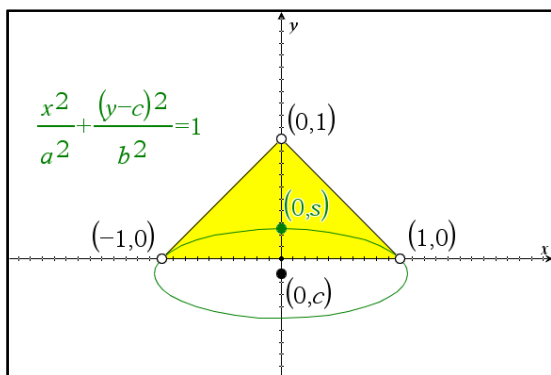
I de følgende øvelser undersøger vi denne struktursætning for dobbelt retlinjede flader. Vi starter med at kigge på den tilsvarende situation i plangeometrien. Igen forenkler vi diskussionen ved at holde os til ligebenede trekanten, dvs. trekanten med stor symmetri:

Sætning 13: Struktursætningen for keglesnit i ligebenede trekanten

Der er givet en ligebenet trekant ABC med grundlinje AC og toppunkt i B . Gennem ethvert punkt S på medianen fra B går der netop et keglesnit, der tangerer trekantens sider i A og C .

- Hvis S ligger over medianens midtpunkt er der tale om en hyperbel (evt. en ligesidet hyperbel).
- Hvis S ligger i medianens midtpunkt er der tale om en parabel.
- Hvis S ligger under medianens midtpunkt er der tale om en ellipse (evt. en cirkel).

Parabeltilfældet har vi undersøgt grundigt i afsnit 1.3. Så de to følgende øvelser handler om hyperbeltilfældet og ellipsetilfældet. I begge tilfælde tager vi udgangspunkt i den ligebenede retvinklede trekant med grundlinje 2. Vi kunne godt analysere problemet rent geometrisk, men det er nemmere at forstå det tilsvarende problem i rummet, hvis vi løser problemet analytisk. Vi indfører derfor et koordinatsystem som vist på figuren:



Øvelse 3.20: Ellipsetilfældet

- a) Gør rede for at ellipsen må have en ligning på formen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1$ og at tangenthældningen y' i ellipsepunktet (x, y) må tilfredsstille en ligning på formen $\frac{2x}{a^2} + \frac{2 \cdot (y-c) \cdot y'}{b^2} = 0$.

- b) Gør rede for at ellipsen, der går gennem punktet $(0, s)$ og tangerer trekantsiderne i punkterne $(-1, 0)$ og $(1, 0)$ må tilfredsstille ligningssystemet:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(s-c)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{c}{b^2} = 0$$

og gør rede for at ligningssystemet kun kan løses, hvis $s < \frac{1}{2}$.

- c) Indfør en skyder for s og tegn den tilhørende ellipse. Hvad sker der i grænsen $s = 0$ og $s = \frac{1}{2}$?

Øvelse 3.21: Hyperbeltilfældet

- a) Gør rede for at hyperblen må have en ligning på formen $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1$ og at tangenthældningen y' i hyperbelpunktet (x, y) må tilfredsstille en ligning på formen

$$-\frac{2x}{a^2} + \frac{2 \cdot (y-c) \cdot y'}{b^2} = 0.$$

- b) Gør rede for at hyperblen, der går gennem punktet $(0, s)$ og tangerer trekantsiderne i punkterne $(-1, 0)$ og $(1, 0)$ må tilfredsstille ligningssystemet:

$$-\frac{1}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(s-c)^2}{b^2} = 1$$

$$-\frac{1}{a^2} + \frac{c}{b^2} = 0$$

og gør rede for at ligningssystemet kun kan løses, hvis $s > \frac{1}{2}$.

- c) Indfør en skyder for s og tegn den tilhørende hyperbel. Hvad sker der i grænsen $s = 0$ og $s = \frac{1}{2}$?

Vi vender os derefter mod den tilsvarende situation i rummet!

Øvelse 3.22:

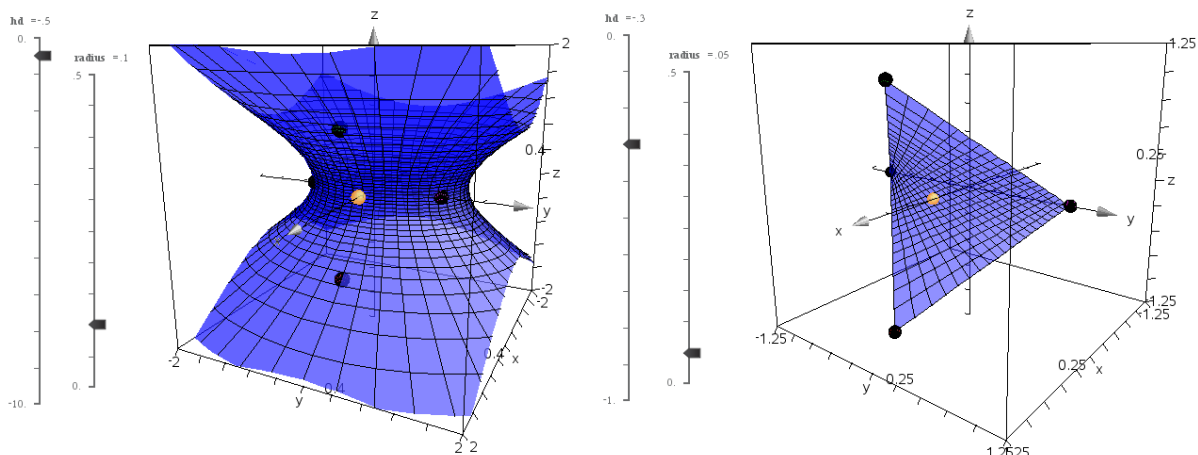
- a) Vi betragter den vindskæve rombe $A = \{1, 0, -1\}$, $B = \{0, -1, 0\}$, $C = \{0, 1, 0\}$, $D = \{1, 0, 1\}$. Prøv at illustrere den i 3d-grafer. Gør rede for at tyngdepunktet T må ligge på x -aksen og have koordinaten $x = \frac{1}{2}$.
- b) Gør rede for at cirklen, der forbinder B med C må ligge i x - y -planen og have centrum i $\{-1, 0, 0\}$ og radius $\sqrt{2}$. Gør rede for at cirklen må have ligningen $(x+1)^2 + y^2 = 2$. Gør rede for at styrepunktet S må ligge på x -aksen og at S må have koordinaten $x = \sqrt{2} - 1$.

- c) Gør rede for at hyperblen, der forbinder A med D må ligge i x - z -planen med centrum i $\{-1, 0, 0\}$ og halvakslerne $\sqrt{2}$ og 1 (den er altså ikke ligesidet!). Gør rede for at hyperblen må have ligningen $\frac{(x+1)^2}{2} - z^2 = 1$.
- d) Gør rede for at omdrejningshyperboloiden må have ligningen $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$. Prøv at illustrere den med en 3d-graf! Gør rede for at linjestykkerne AB og AC samt BD og CD ligger i omdrejningshyperboloiden, dvs. de er frembringere for omdrejningshyperboloiden.

Vi vil nu prøve at finde den generelle hyperboloide, der passer ind i rammen udspændt af den vindskæve firkant. Vi får da brug for at kunne udtrykke at ikke blot punkterne A, B, C og D ligger på hyperboloiden, men også at frembringerne AB, AC samt BC og BD ligger i hyperboloidefladen. Det er da nemmest at udnytte at der er tale om andengradsflader. Hvis derfor blot tre af punkterne på linjen ligger på fladen må hele linjen være indesluttet i fladen! Det er derfor nok at kontrollere at også midtpunkterne $M_{AB}, M_{AC}, M_{BD}, M_{CD}$ ligger på fladen.

Øvelse 3.23:

- a) Gør rede for den ovennævnte påstand. Udnyt at skæring mellem andengradsfladen og den rette linje i almindelighed fører til løsning af en andengradsligning, hvor vi dog ikke kan være sikre på at fx andengradscoeffcienten er forskellig fra 0. Hvilke muligheder er der for løsninger til dette ligningssystem? Prøv at illustrere de forskellige muligheder. Vink: Det kan være nemmere at starte med at kigge på skæring mellem en andengradskurve (keglesnit) og en ret linje i en plan.



Øvelse 3.24:

- a) Vi kigger igen på den vindskæve rombe $A = \{1, 0, -1\}$, $B = \{0, -1, 0\}$, $C = \{0, 1, 0\}$, $D = \{1, 0, 1\}$. Gør rede for at ligningen for hyperboloiden må være på formen: $\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Gør rede for at hvis A ligger på hyperboloiden gælder det samme for D og tilsvarende at hvis B ligger på hyperboloiden gælder det samme for C . Gør tilsvarende rede for at hvis blot et af de fire midtpunkter $M_{AB}, M_{AC}, M_{BD}, M_{CD}$ ligger på hyperboloiden gælder det samme for de øvrige tre.
- b) Opstil tre ligninger, som hyperboloide-parametrene a, b, c og d må opfylde for at den vindskæve rombe ligger på hyperboloiden. Kontroller at hvis du insister på at det skal være en omdrejningshyperboloide, dvs. $a = b$, så finder du samme løsning som i øvelse 10.

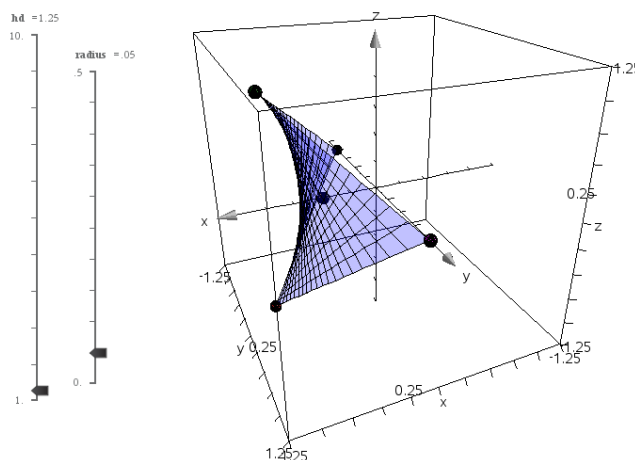
- c) Da vi har én overskydende parameter kan vi nu løse de tre ligninger med bibetingelserne $a > 0, b > 0, c > 0$ samt $d < 0$. Gør rede for at ligningen for den generelle hyperboloide bliver på formen: $\frac{(x-d)^2}{d \cdot (d-1)} + \frac{y^2}{1-d} - \frac{z^2}{-d} = 1$, hvor vi skal huske på, at d er negativ!
- d) Bestem styrepunktet på x-aksen udtrykt ved parameteren d , der angiver placeringen af centrum for hyperboloiden. Gør rede for at styrepunktets koordinat ligger mellem 0 og $\frac{1}{2}$. Du kan evt. tilføje tyngdepunktet T på illustrationen, så du kan se at fladen ligger bagved T .
- e) Indfør en skyder for d (husk at d skal være negativ!) og tegn den generelle hyperboloide udspændt af den vindskæve rombe. I første omgang er det ok med en illustration af hele hyperboloiden, men derefter er det en udfordring at få den tegnet, så den ligger indenfor rammen! Problemet er at du ikke kan overføre skyderens værdi til grænserne for parameterintervallet dynamisk. Men det kan løses ved i stedet at sætte begrænsningen ind i forskriften for parameterfremstillingen. I praksis gøres det således: Parameterforskriften (hvor parametergrænserne afhænger af skydervariablen k)

$$x = f(t), \quad g(k) \leq t \leq h(k)$$

 erstattes af

$$x = f((1-t) \cdot g(k) + t \cdot h(k)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Flyttes styrepunktet over på den anden side af tyngdepunktet T kan man stadigvæk finde en hyperboloide der passer ind i rammen, men der byttes nu om på ellipsen og hyperboloiden, ellipsen ligger lodret og hyperblen ligger vandret. Det svarer til at vi i stedet forbinder punkterne B med C i den vindskæve firkant.



På figuren har jeg tilføjet tyngdepunktet T , så du kan se at fladen denne gang passerer foran T .

Øvelse 3.25:

- a) Vi kigger igen på den vindskæve rombe $A = \{1, 0, -1\}$, $B = \{0, -1, 0\}$, $C = \{0, 1, 0\}$, $D = \{1, 0, 1\}$. Gør rede for at ligningen for hyperboloiden nu må være på formen: $\frac{(x-d)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- b) Opstil de tre ligninger, som hyperboloide-parametrene a, b, c og d må opfylde for at den vindskæve rombe ligger på hyperboloiden.
- c) Da vi har én overskydende parameter kan vi nu løse de tre ligninger med bibetingelserne $a > 0, b > 0, c > 0$ samt $d > 1$. Gør rede for at ligningen for den generelle hyperboloide bliver på formen: $\frac{(x-d)^2}{d \cdot (d-1)} - \frac{y^2}{d-1} + \frac{z^2}{d} = 1$, hvor vi skal huske på, at d er større end 1!

- d) Bestem styrepunktet på x -aksen udtrykt ved parameteren d , der angiver placeringen af centrum for hyperboloiden. Gør rede for at styrepunktets koordinat ligger mellem $\frac{1}{2}$ og 1. Du kan evt. tilføje tyngdepunktet T på illustrationen, så du kan se at fladen denne gang ligger foran T .
- e) Indfør en skyder for d (husk at d skal være større end 1!) og tegn den generelle hyperboloide udspændt af den vindskæve rombe. I første omgang er det ok med en illustration af hele hyperboloiden, men derefter er det en udfordring at få den tegnet, så den ligger indenfor rammen!

Ligesom vi kan udfylde en trekant ABC med et keglesnit, der tangerer de to af trekantsiderne, så kan vi altså udfylde tetraederet udspændt af en vindskæv firkant med en dobbelt retlinjet keglesnitsflade. Det giver os større frihed, når vi skal opbygge en modulær struktur i rummet.

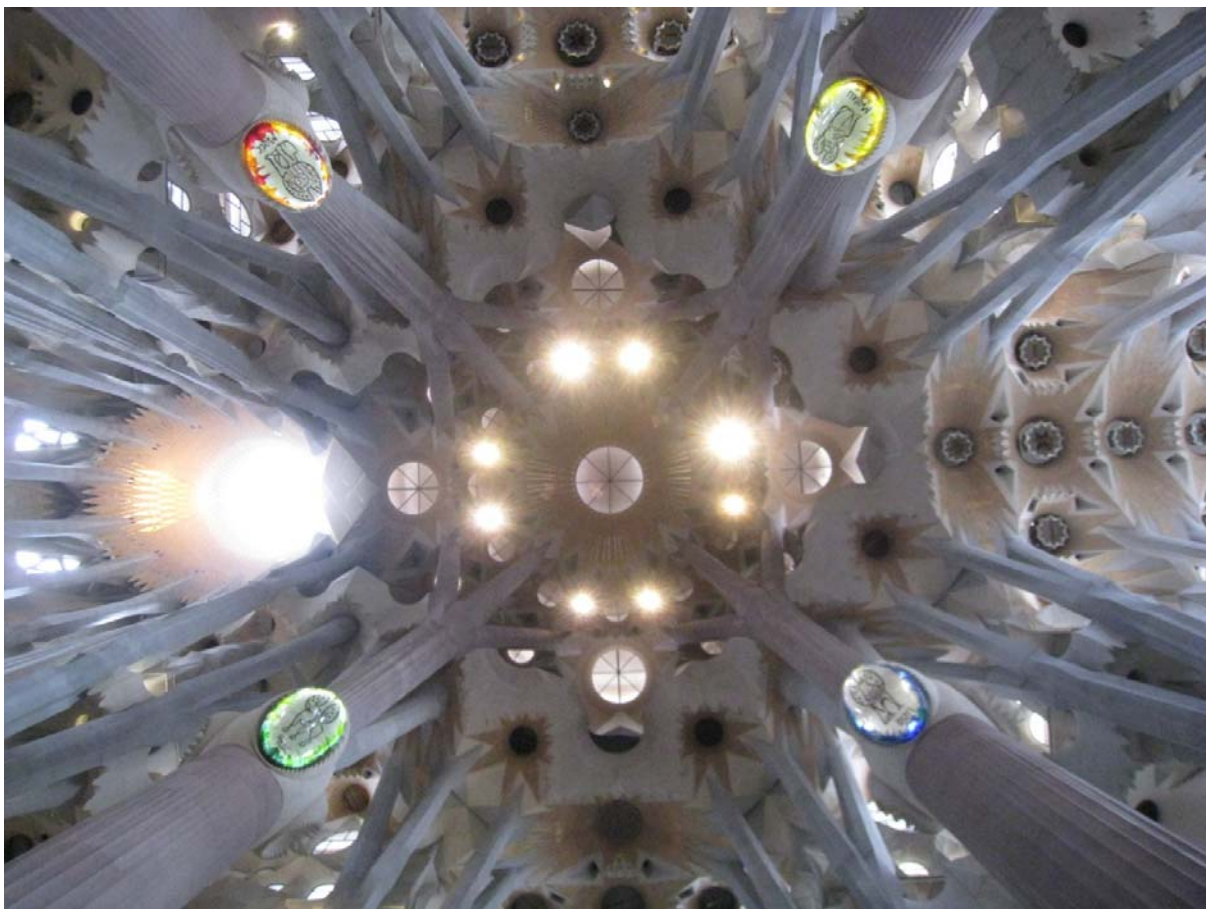
Sætning 14: Struktursætningen for dobbeltretlinjede flader i vindskæve romber

Der er givet en vindskæv rombe $ABCD$ med toppunkter i A og D . Gennem ethvert punkt S på aksen, der forbinder diagonalernes midtpunkter, dvs. $M_{BC}M_{AD}$, går der netop en dobbeltretlinjet flade, der tangerer den vindskæve rombe i A og D .

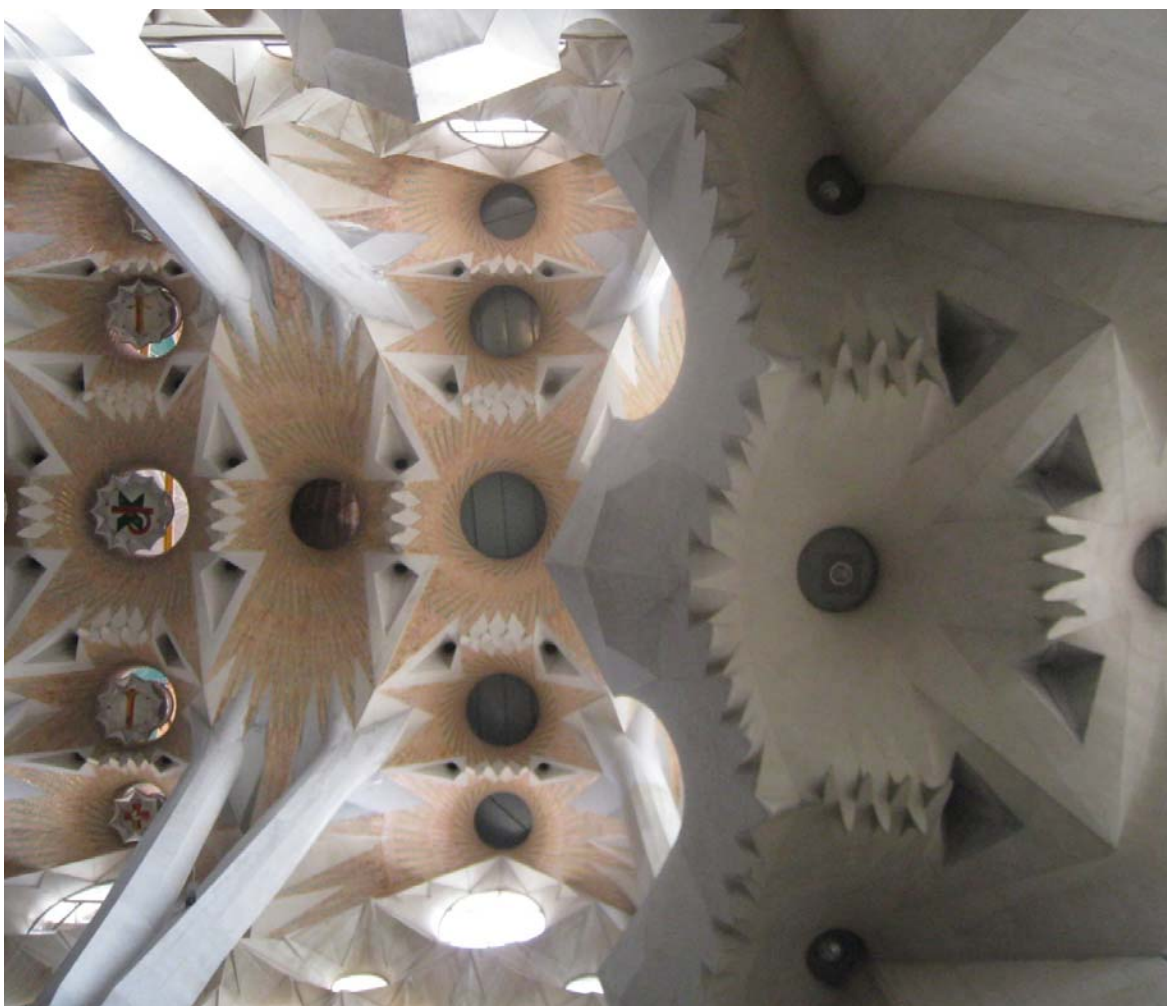
- Hvis S ligger tættest ved M_{BC} er der tale om en elliptisk hyperboloide med en ellipse i trekant $BM_{BC}C$ og en hyperbel i trekant $AM_{AD}D$.
- Hvis S ligger i aksens midtpunkt er der tale om en hyperbolsk paraboloid med en parabel i trekant $BM_{BC}C$ og en parabel i trekant $AM_{AD}D$.
- Hvis S ligger tættest ved M_{AD} er der tale om en elliptisk hyperboloide med en hyperbel i trekant $BM_{BC}C$ og en ellipse i trekant $AM_{AD}D$.

3.4 Gaudis lysskakter

Den mest spektakulære anvendelse af hyperboloiderne i Gaudis arkitektur sker uden tvivl i forbindelse med lysindfaldet i Sagrada Familia. Lysskakterne er store cirkelformede åbninger, der netop svarer til strubecirklerne i omdrejningshyperboloiderne:

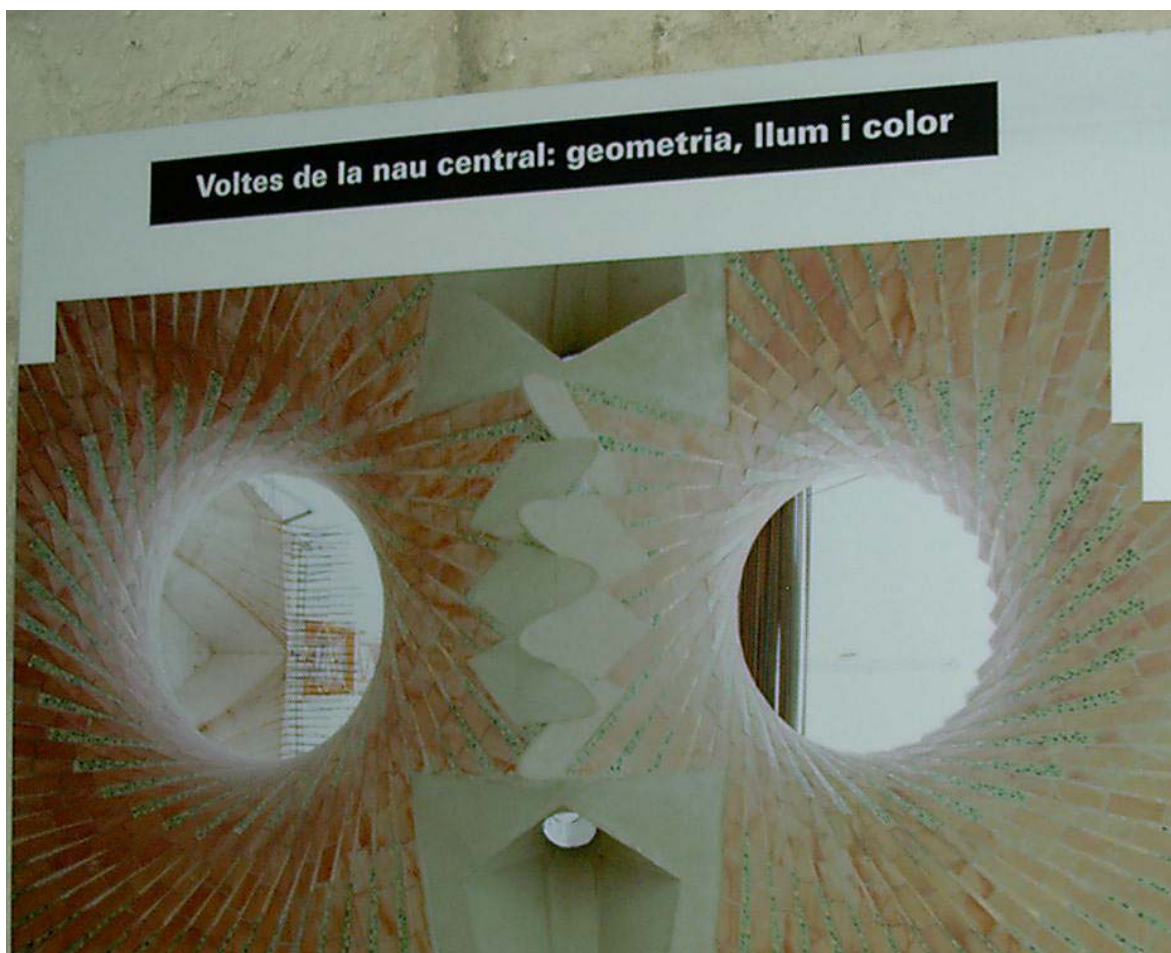


Lysskakternes opbygning som omdrejningshyperboloider ses klart på modellerne. Interessant nok er keramikken denne gang udformet, så den kun følger det ene system af retlinjede frembringere. Det ses tydeligt på de originale fragmenter, hvor de grønne striber gennemskæres på skrå af keramikken.



Kaster vi et nærmere blik på lysskaterne ser vi at de er omgivet af takker, der følger de retlinjede frembringere. Takkerne har ikke alle samme længde, men samlet i stjerneformede mønstre. Der hvor to

systemer af takker mødes er de flettet ind i hinanden som tunger. De kan godt anes på den ovenstående billede, men ellers fremgår de tydeligt af den følgende planche:



Men sådanne takker på omdrejningshyperboloiderne er jo netop hvad vi har set på i stor detalje i det foregående afsnit, se side 100-101.

Litteraturliste:

Ved udarbejdelsen af hæftet har jeg især støttet mig til de følgende værker om Gaudis arkitektur:

Gaudi: Exploring form – Space, geometry, structure and construction. 2002. Ed. Giralt-Miracle.

The Essential Gaudi – The geometric modulation of the Church of the Sagrada Familia. 2000. Jordi Bonnet.

Gaudi – Rationalist met perfecte materiaalbeheersung. 1989. Ed. Bak, Heide, Molema og Tomlow.

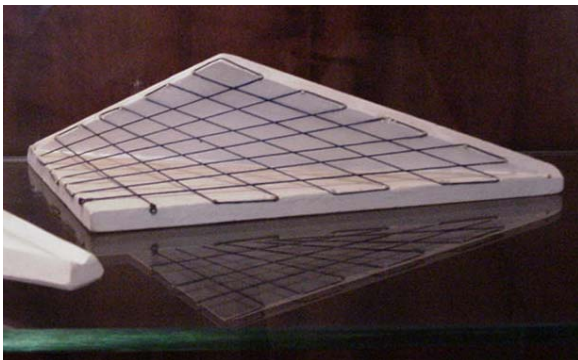
Dertil kommer selvsagt Ivan Taftebjergs glimrende introduktion til geometrien bag Gaudis arkitektur:

Antoni Gaudí: Geometrien bag arkitekturen. 2011. Ivan Taftebjerg Jakobsen.

Gaudis arkitektur med TI-Nspire CAS



Gaudi var en mester i dekorativt design. Han indførte ikke bare et organisk design inspireret af naturens former, men støttede sig også i udstrakt grad til parablen, og mere alment parabellignende kurver som kædelinjen, som designelement i sine legendariske bygningsværker, hvoraf mange er optaget på Unescos verdensarvsliste. I hæftets første del fortælles om matematikken bag parabler og kædelinjer.



Gaudis spektakulære udnyttelse af de to typer dobbelt retlinjede flader i arkitekturen var en revolution. I anden del af hæftet fortælles om matematikken bag de to dobbelt retlinjede flader, ikke mindst de parametriseringer, der ligger bag ved de to 'guddommelige flader'.

Besøg vores hjemmeside
education.ti.com/danmark



TI Kundenservice

Tlf: 38 18 19 56

mail: ti-cares@ti.com